

Ю. Л. Павлов (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **Кластерная структура конфигурационных графов.**

Рассмотрим конфигурационный граф с N вершинами [1], степени которых ξ_1, \dots, ξ_N — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$p_k = \mathbf{P} \{ \xi_i = k \} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$, τ — положительный параметр. В случае необходимости для обеспечения четности суммы степеней вершин в граф вводится вспомогательная вершина единичной степени. Степень каждой вершины равна числу выходящих из нее различных полуребер, а ребра графа образуются путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом. В таком графе возможны петли и кратные ребра.

Пусть Q — максимальная модулярность графа [2] и C — глобальный кластерный коэффициент [3]. Обозначим

$$q_k = (k+1)p_{k+1}/\mathbf{E} \xi_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

и пусть

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad M = (\mathbf{E} \xi_1)^{-1} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда асимптотически почти наверное справедливы следующие утверждения:

1. если $M \leq 1$, то $Q \rightarrow 1$.
2. если $M > 1$, то $Q \geq 1 - (1 - F(q))^2 + o(1)$,

где q — вероятность вырождения начинающегося с одной частицы ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с распределением (2) числа прямых потомков каждой частицы.

Теорема 2. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда асимптотически почти наверное справедливы следующие утверждения:

1. если $\tau > 2$, то $C = O(1/N)$.
2. если $\tau = 2$, то $C = O((\ln^2 N)/N)$.
3. если $0 < \tau < 2$, то $C = O(N^{(4-3\tau)/\tau})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formulae for the number of labelled regular graphs. — Eur. J. Comb., 1980, v. 2, p. 311–316.
2. Newman M. E. J. Modularity and community structure in networks. — PNAS, 2006, v. 103, is. 23, p. 8577–8583.
3. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. V. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017, 337 pp.