ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 26 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2019

Я. Е. Ромм, А. В. Березовой (Таганрог, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал), ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)»). **Преобразование интерполяционного полинома Лагранжа для компьютерного вычисления интеграла.**

Приближенное вычисление интеграла в компьютерной реализации предполагается выполнять с максимальной точностью при условии минимизации временной сложности. Наиболее часто для этой цели используется кусочная интерполяция подынтегральной функции на основе интерполяции по Ньютону. Ниже излагается подход на основе преобразования полинома Лагранжа. Интеграл представляется суммой интегралов по подынтервалам равной длины:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx.$$

На каждом подынтервале подынтегральная функция интерполируется полиномом Лагранжа:

$$f(x) \approx \Psi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}, \qquad (1)$$

который априори преобразован к виду

$$\Psi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \frac{(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{j-1})(t-t_{j+1})\cdots(t-t_n)}{(t_j-t_0)(t_j-t_1)\cdots(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j+1})\cdots(t_j-t_n)}, \qquad t = \frac{x-a_i}{h},$$

где

$$t_r = \begin{cases} r, & r < j; \\ r+1, & j \leqslant r \leqslant n-1, \end{cases} \qquad h = \frac{a_{i+1}-a_i}{n}.$$

При этом числитель и знаменатель дроби в (1) переводятся в форму алгебраического полинома с целочисленными коэффициентами с помощью алгоритма, отличного от формул Виета [1]. Вычисление значения такого полинома принципиально снижает накопление погрешности по сравнению с исходной формой полинома с вещественными коэффициентами. Согласно преобразованию получится:

$$\Psi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\frac{P_{jn}(t)}{P_{jn}(j)}, \qquad P_{jn}(t) = \sum_{\lambda=0}^{n} d_{\lambda j}\, t^{\lambda}, \quad t = \frac{x-a_i}{h},$$

где полиномы дроби имеют целочисленные коэффициенты. Для наилучшего приближения подынтегральной функции с помощью элементарного алгоритма варьируется число подынтервалов N и степень полинома n. Первообразная от полинома в данной форме имеет аналитическое выражение. Вся схема без труда программируется.

Ниже даны выборочные результаты численного эксперимента, где ε — абсолютная *погрешность* вычисления интеграла от функции $f(x)$ на подынтервале длины h промежутка $[a,b]$, n — степень полинома:

$$f = \cos x; \qquad n = 5, \quad a = 0, \quad h = 0,01, \qquad b = 2,58; \quad \varepsilon = 9,76 \times 10^{-19};$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \qquad n = 5, \quad a = 0, \quad h = 0,0001, \quad b = 0,58; \quad \varepsilon = 2,75 \times 10^{-21};$$

$$f = \sin x; \qquad n = 2, \quad a = 0, \quad h = 0,0001, \quad b = 0,58; \quad \varepsilon = -5,42 \times 10^{-19};$$

Результаты эксперимента в целом показывают, что предложенный метод осуществляет приближенное вычисление определенного интеграла с точностью порядка не ниже 10^{-19}. Минимизация временной сложности осуществляется за счет выбора минимального значения при достижении заданной границы абсолютной погрешности приближения подынтегральной функции. При этом все слагаемые полинома на всех подынтервалах могут вычисляться параллельно. Вычисление тех же интегралов по формуле Симпсона выполнялось с существенно меньшей точностью. С меньшей точностью интеграл вычисляется, если аналогичную схему применить на основе полного приведения подобных в полиноме Ньютона [2], или в исходном представлении полинома Лагранжа [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ромм Я. Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II. — Кибернетика и системный анализ, 2007, № 2, с. 161–174.
2. *Аксайская Л. Н.* Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций. — Автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2008, 18 с.
3. *Ромм Я. Е.*, *Фирсова С. А.* Минимизация временной сложности вычисления функций с приложением к цифровой обработке сигналов. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2008, 124 с.