А. Л. Я к ы м и в (Москва, МИАН). **Объём наибольшей компоненты случайного A -отображения.**

Пусть $\mathfrak{S}_n$ — полугруппа отображений множества X из n элементов в себя. Рассматривается совокупность $\mathfrak{S}_n(A)$ отображений из $\mathfrak{S}_n$, объёмы контуров которых принадлежат множеству $A \subseteq N$. Такие отображения называются A -отображениями (см., например, книги [13, 14, 15]). Пусть случайное отображение τ_n имеет на множестве $\mathfrak{S}_n(A)$ параметрическое распределение, согласно которому

$$P\{\tau_n = \omega(\cdot)\} = \vartheta_1^{u_1} \dots \vartheta_n^{u_n} / H_n(\vartheta); \quad H_n(\vartheta) = n! z^n \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i m_i \vartheta_i}{i!}\right).$$

Здесь $\omega(\cdot)$ произвольное фиксированное отображение из $\mathfrak{S}_n(A)$, u_i — число компонент объёма i этого отображения, $\{\vartheta_i, i \in N\}$ — некоторые неотрицательные параметры, называемые весами компонент объёма i отображения $\omega(\cdot)$, а $m_i = m_i(A)$ — число отображений из $\mathfrak{S}_i(A)$, имеющих одну компоненту связности. Мы применили здесь общую формулу (6) из работы [8], краткие сообщения об этом результате даны в [6, 7].

Пусть с.в. $\mu_m(n)$ — m -й максимум объёмов компонент этого случайного отображения (m -й член справа вариационного ряда объёмов его компонент). Положим при $x > 0$, $\sigma > 0$ и $m \in N$

$$\Phi_{\sigma m}(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=m}^{[1/x]} \frac{(-1)^{k-m} \sigma^k}{k(m-1)!(k-m)!} J_{\sigma k}(x) & \text{при } x < m^{-1}, \\ 1 & \text{при } x \geq m^{-1}; \end{cases}$$

$$J_{\sigma k}(x) = \int_{V_k(x)} (1 - y_1 - \dots - y_k)^{\sigma-1} \frac{dy_1 \dots dy_k}{y_1 \dots y_k},$$

$$V_k(x) = \{y = (y_1, \dots, y_k) \in R^k, \sum_{j=1}^k y_j \leq 1, y_j \geq x \forall j = 1, \dots, k\}.$$

Зафиксируем произвольное множество $D \subseteq N$. Мы будем предполагать, что

$$\vartheta_n \rightarrow \begin{cases} \vartheta > 0, & n \in D, \\ 0, & n \in N \setminus D, \end{cases}$$

Справедлива следующая предельная теорема.

Теорема. Пусть множество A имеет положительную асимптотическую плотность ϱ во множестве натуральных чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |k : k \in A, k \leq n|/n = \varrho > 0. \quad (1)$$

Предположим также, что

$$p(n) \equiv_{z^n} \exp\left(\sum_{i \in D} \frac{z^i \vartheta \varrho}{2i}\right) = n^{\sigma-1} L(n), \quad (2)$$

где последовательность $L(n)$ медленно меняется на бесконечности [16], причем $\sigma > 0$. Тогда для произвольных фиксированных $m \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 1]$

$$\mathbb{P}\{n^{-1}\mu_m(n) \leq x\} \rightarrow \Phi_{\sigma, m}(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

При этом асимптотическая плотность множества D во множестве натуральных чисел существует и равна $2\sigma/\vartheta$.

В статье [20] приводится широкий класс примеров множеств A , имеющих положительную асимптотическую плотность во множестве натуральных чисел, т. е. удовлетворяющих (1). Потому приведем только примеры множеств D , удовлетворяющих (2).

Пример 1. Пусть множество D — случайно, причем случайные величины $\xi_n = \chi\{n \in D\}$, $n \in \mathbb{N}$ независимы в совокупности и $\mathbb{P}\{\xi_n = 1\} \rightarrow \rho > 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in B$ для некоторого множества $B \subseteq \mathbb{N}$ асимптотической плотности 1. Тогда при всех ϑ, ϱ соотношение (2) выполнено для D почти наверное (п. н.) и, стало быть,

$$\mathbb{P}\{n^{-1}\mu_m(n) \leq x | D\} \rightarrow \Phi_{\sigma m}(x) \text{ п. н.}$$

Пример 2. Пусть заданы произвольное конечное объединение Δ отрезков из $[0, 1]$ и функция $g(t) = t^\alpha l(t)$, $\forall t > 0$, где функция $l(t)$ медленно меняется на бесконечности [16], а число α — положительное и нецелое. Мы будем включать число $n \in \mathbb{N}$ в множество A тогда и только тогда, когда $\{g(n)\} \in \Delta$. Если для произвольного $m = 1, 2, \dots, [\alpha] + 3$ при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{d^m}{dt^m} l(t) = o(t^{-m} l(t)),$$

то для множества D выполнено соотношение (2) при всех ϑ, ϱ и, стало быть, справедлива теорема.

Как в примере 1, так и в примере 2 $\sigma = \rho\varrho\vartheta/2$, где ρ — плотность множества D , причем в примере 2 ρ есть сумма длин составляющих Δ отрезков.

Отметим, что первыми были введены и исследованы в некоторых конкретных ситуациях более общие объекты — отображения с ограничениями на контур и высоту в работах [11, 12] (1972, 1973) — так называемые AB -отображения. Асимптотические свойства различных характеристик случайных A -отображений исследованы в статьях [19]–[23]. Отметим также, что случайные отображения с ограничениями на объемы компонент недавно были рассмотрены в работах [17, 18]. Если в исследованной нами модели случайного отображения положить $\theta_i = \chi\{i \in D\}$, то мы приходим к классу отображений с ограничениями на объемы компонент и объемы контуров. При этом получим случайное отображение с равномерным распределением на этом классе. Поэтому, полагая поочередно $A = \mathbb{N}$ и $D = \mathbb{N}$, мы приходим к моделям, рассмотренным в упомянутых работах [17, 18] и [19]–[23], соответственно. Однако, экстремальные задачи в этих работах не исследовались.

Экстремальные свойства случайных подстановок, случайных отображений и других комбинаторных структур явились предметом пристального внимания со стороны целого ряда авторов, начиная с основополагающей работы [2] (1944). Более подробные ссылки и история вопроса даны в статьях [4, 5], см. также монографию [9], где изложена соответствующая теория экстремумов для подстановок и общих случайных отображений и даны библиографические комментарии к ней до конца 1984 г. В частности, в [9] доказана предельная теорема для максимального объема случайного отображения, равномерно распределенного на $\mathfrak{S}_n$. В монографии [1] рассматриваются случайные ансамбли, для которых $\vartheta_i \rightarrow \theta > 0$ ($i \rightarrow \infty$). Здесь, в частности, получены интегральная и локальная предельные теоремы. Аналогичный результат для случайных отображений получен в более ранней работе [3]. Как в [1], так и в [3] имеется обширная библиография по данной тематике.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00111).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arratia R., Barbour A.D., Tavaré S.* Logarithmic Combinatorial Structures: A Probabilistic Approach (2003), European Mathematical Society.
2. *Гончаров В. Л.* Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР, сер. матем. 1944, т. 8, с. 3–48.
3. *Donnelly P. J., Ewens W. J., Padmadisastra S.* Functionals of random mappings: exact and asymptotic results. — Adv. in Appl. Probab., 1991, 23, № 3, с. 437–455.
4. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* О случайных подстановках. Труды по дискретной математике. Т. 5. М.: Физматлит, 2002, с. 73–92.
5. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Метод В. Л. Гончарова и его развитие в анализе различных моделей случайных подстановок. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, № 3, с. 558–566.
6. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Неравновероятные меры на множествах разложимых комбинаторных объектов. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 2, с. 348–349.
7. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Случайные комбинаторные объекты. — Доклады РАН, 2004, т. 396, № 2, с. 151–154.
8. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Случайные комбинаторные объекты в общей параметрической модели. — Труды по дискретной математике. Т. 10. М.: Физматлит, 2007, с. 73–86.
9. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984.
10. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000.
11. *Сачков В. Н.* Отображения конечного множества с ограничениями на контур и высоту. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, № 4, с. 679–694.
12. *Сачков В. Н.* Случайные отображения ограниченной высоты. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 1, с. 122–132.
13. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.
14. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.
15. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
16. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
17. *Тимашёв А. Н.* Случайные компоненты в обобщенной схеме размещения. М.: Академия, 2017.
18. *Тимашёв А. Н.* Случайные отображения с объемами компонент из заданного множества. — Теория вероятн. и ее примен., 2019, т. 64, в. 3, с. 599–610.
19. *Якымив А. Л.* О числе A -отображений. — Матем. заметки, 2009, т. 86, в. 1, с. 139–147.
20. *Якымив А. Л.* О числе циклических точек случайного A -отображения. — Дискрет. матем., 2013, т. 25, т. 3, с. 116–127.
21. *Якымив А. Л.* О числе компонент случайного A -отображения. — Теория вероятн. и ее примен., 2014, т. 59, в. 1, с. 81–96.
22. *Якымив А. Л.* О числе компонент фиксированного объема случайного A -отображения. — Матем. заметки, 2015, т. 97, в. 3, с. 462–470.
23. *Якымив А. Л.* Предельная теорема для логарифма порядка случайного A -отображения. — Дискрет. матем., 2017, т. 29, в. 1, с. 136–155.