

В. П. Котельников (Ростов-на-Дону, ВНИИ «Градиент»). Метод определения числовых характеристик произведения нескольких коррелированных случайных величин.

Предлагаемый метод значительно проще, чем изложенный в [1], так как не требует знания распределений вероятностей случайных величин.

Постановка задачи. Рассматривается произведение m случайных аргументов $u = \prod_{i=1}^m x_i$. Известны математические ожидания Mx_i , дисперсии Dx_i и корреляционная матрица $[r_{x_i x_j}]_1^m = [r_{ij}]_1^m$. Необходимо вычислить математическое ожидание Mu и дисперсию Du .

Решение. Рассмотрим частную функцию $y = x_1 x_2$ и определим ее характеристики. Математическое ожидание находим по известной теореме:

$$My = Mx_1 Mx_2 + r_{x_1 x_2} \sqrt{Dx_1} \sqrt{Dx_2}.$$

Дисперсию вычисляем на основе выражения, предложенного в [2]:

$$\begin{aligned} Dy &= (1 + r_{x_1 x_2}^2) Dx_1 Dx_2 + Dx_1 (Mx_2)^2 + Dx_2 (Mx_1)^2 \\ &+ 2 r_{x_1 x_2} \sqrt{Dx_1} \sqrt{Dx_2} Mx_1 Mx_2. \end{aligned}$$

Далее применяем метод математической индукции. При $m = 3$ рассмотрим функцию $u = y x_3$ и определим ее характеристики. Вначале вычислим коэффициент множественной корреляции

$$R_{x_3|y} = R_{x_3|x_1 x_2} = \sqrt{\frac{r_{x_1 x_3}^2 + r_{x_2 x_3}^2 - 2 r_{x_1 x_2} r_{x_1 x_3} r_{x_2 x_3}}{1 - r_{x_1 x_2}^2}}.$$

Математическое ожидание и дисперсию функции находим по аналогичным выше выражениям:

$$\begin{aligned} Mu &= Mx_3 My + R_{x_3|y} \sqrt{Dx_3} \sqrt{Dy}, \\ Du &= (1 + R_{x_3|y}^2) Dx_3 Dy + Dx_3 (My)^2 + Dy (Mx_3)^2 \\ &+ 2 R_{x_3|y} \sqrt{Dx_3} \sqrt{Dy} Mx_3 My. \end{aligned}$$

Для $m = 2$ и $m = 3$ при большом числе вариантов исходных данных математические ожидания и дисперсии вычислены по приведенным формулам, а также методом статистического моделирования. Результаты показали приемлемую для инженерных расчетов точность, поэтому для решения поставленной задачи при $m \geq 3$ можно применить метод математической индукции. Когда аргументы функции u некоррелированы, выражения для Mu и Du совпадают с известными выражениями из теорем о числовых характеристиках.

Коэффициент множественной корреляции определяется по известному выражению

$$R_{x_m|x_1 x_2 \dots x_{m-1}} = \sqrt{1 - \frac{\Delta_r}{\Delta_{mm}}},$$

где Δ_r — определитель корреляционной матрицы $[r_{ij}]_1^m$, Δ_{mm} — алгебраическое дополнение элемента r_{mm} корреляционной матрицы. Целесообразно $R_{x_m|x_1x_2\ldots x_{m-1}}$ вычислять на компьютере, используя встроенные функции для определителей матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котельников В. П. Аналитический метод вычисления числовых характеристик произведения двух и более коррелированных случайных величин. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2018, т. 25, в. 1, с. 82–83.
2. Котельников В. П. Вычисление дисперсии произведения двух коррелированных случайных величин. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2017, т. 24, в. 1, с. 75.