

Н. В. Данилова, И. А. Землякова (Ростов-на-Дону, ЮФУ).
Некоторые задачи оптимального управления с разладкой.

Процессы с разладкой являются важным подклассом процессов со сменой режимов. Основной задачей, которая обсуждается в публикациях, является задача наиболее быстрого обнаружения момента разладки [1–3]. Рассматривается обобщение процессов с разладкой, а именно процессы с векторной разладкой, и важный класс задач оптимального управления такого рода процессами без обнаружения разладки.

Рассмотрим задачу оптимального управления на конечном интервале $[0, T]$ следующего вида:

$$\min_{\beta_{Y/X}} E(\Phi(Y_T, \xi)) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} Y(t) &= y_0 + \int_0^t \beta_{Y/X}(s) dX_s, \\ X(t) &= x_0 + \int_0^t \alpha_X(s) dX_s + \int_0^t \beta_X(s) dW_s, \\ y_0 &\leq a. \end{aligned}$$

Здесь случайная величина ξ измерима относительно σ -алгебры F_T , $\Phi(x, y)$ — выпуклая функция по первой переменной при произвольном значении второй переменной.

Процесс X — базовый процесс, а процесс $\beta_{Y/X}$ — управление или стратегия. Рассмотрим мартингальную меру $\bar{P} : d\bar{P}_T = Z_T dP_T$. Относительно этой новой меры процессы X_t и Y_t — мартингалы с непрерывными траекториями. Предположим, что существует решение задачи

$$\min_{\eta} E(\Phi(\eta, \xi)) \quad \text{при условии} \quad \bar{E}\eta \leq a. \quad (2)$$

Допустим, что η^* — решение задачи (2). Рассмотрим процесс

$$V(t) = \bar{E}(\eta^* / F_t), \quad (3)$$

который является равномерно интегрируемым мартингалом относительно определенной ранее фильтрации и меры $\bar{P}$, поэтому (3) выражается в виде

$$V(t) = \bar{E}\eta^* + \int_0^t \beta_{V/X}(s) dX_s. \quad (4)$$

Поскольку $\bar{E}[\eta^*] < \infty$ и $V(T) = \eta^*$, то процесс $\beta_{V/X} = \beta_{Y/X}$ и начальное значение $y_0 = \bar{E}\eta^*$ являются решением задачи (1).

Теорема Если существует решение задачи (2), то решение задачи (1) строится так:

1. Определяется мартингальная мера $\bar{P}$ при помощи процесса плотности Z ;
2. Решается задача (2);
3. Вычисляется мартингал V и разложение мартингала (4) по процессу X .

Рассматривается задача управления на конечном временном интервале. Для этих задач предложен вычислительный метод их решения с использованием мартингальной техники [4].

В качестве приложения к финансовой математике рассматривается модель финансового рынка как пары активов: рискованного (стоимость акции) S и безрискового (банковский счет) B . Эти активы представлены своими ценами $S(t)$ и $B(t)$, $t \in [0, T]$.

Активы подчиняются следующим уравнениям:

$$dS(t) = S(t) dX(t), \quad dB(t) = rB(t) dt \quad (5)$$

с начальными значениями S_0 и B_0 . Рассматривается самофинансируемый портфель, капитал которого $G(t)$: $dG(t) = \gamma(t) dS(t) + \beta(t) dB(t)$. Задача заключается в вычислении

$$\min_{\gamma, \beta} (f(S(T)) - G(T))^+ \quad (6)$$

с учетом (5) при ограничении $G_0 \leq a$. В (6) функция $f(x) \geq 0$ и ограничена сверху. Рассмотрим дисконтированный процесс $\bar{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)}$, дифференциал которого $d\bar{S}(t) = \bar{S}(t)((\alpha_X(t) - r) dt + \beta_X(t) dW_t)$. При этом дифференциал дисконтированного капитала $d\bar{G}(t) = d\frac{G(t)}{B(t)} = \gamma(t) d\bar{S}(t)$. Определим $\bar{f}(\bar{S}(T)) = f(\bar{S}(T)B(T))/B(T)$, что позволяет рассмотреть эквивалентную и более простую задачу: $\min_{\gamma} E(\bar{f}(\bar{S}_T) - \bar{G}(T))^+$ при ограничениях $\bar{G}_0 \leq \frac{a}{B_0}$ и $\bar{G}(t) = \bar{G}_0 + \int_0^t \gamma(s) d\bar{S}(s)$ а решение этой задачи находится с помощью сформулированного ранее вычислительного метода, если положить $X(t) = \bar{S}(t)$ и $Y(t) = \bar{G}(t)$. Далее, не нарушая общности, будем считать, что $r = 0$.

Для случая, когда разладка затрагивает только снос, а $\beta_X(t) = \sigma$ является константой, имеем: $S(t) = S_0 \exp(\bar{C}(t) - \sigma W_t)$ и $B(t) = S_0 \exp(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t)$ для исходной меры и мартингальной меры соответственно. Процесс

$$\bar{C}(t) = C(t) - \frac{\sigma^2}{2}t.$$

Доклад заканчивается рассмотрением результатов вычислительного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shiryaev A. Quickest Detection Problems in the Technical Analysis of the Financial Data / Mathematical finance. Ed. H. Geman, D. Madan, S. Pliska, T. Vorst. Springer, 2000, p. 487–521.
2. Gapeev P. V., Peskir G. The Wiener Disorder Problem With Finite Horizon Stoch. — Proc. Appl. 2006, v. 116, № 12, p. 1770–1791.
3. Truong C., Oudrec L., Vayatisa N. A review of change point detection methods. //arXiv:1801.00718v1 [cs.CE] 2 Jan 2018.
4. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.