

С. Б. Табальев (Москва, МГТУ им. Н.Э.Баумана). **Неаддитивность гомологических биразмерностей тензорных степеней некоторой алгебры функций.**

Предположим, что $A_1, A_2, \dots, A_n$ — бипроективные функциональные банаховы алгебры. В работе [1] доказаны так называемые формулы аддитивности

$$\text{db } A_1^+ \hat{\otimes} A_2^+ \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A_n^+ = \text{db } A_1^+ + \text{db } A_2^+ + \dots + \text{db } A_n^+.$$

Здесь $\hat{\otimes}$ — проективное тензорное произведение банаховых алгебр, A^+ — унитаризация алгебры A , $\text{db } A$ — гомологическая биразмерность банаховой алгебры A . В теореме 1 мы докажем, что для произвольных ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел гомологические биразмерности унитаризаций бипроективных алгебр функций могут иметь свойства, наиболее далекие от аддитивности.

Пусть c_{00} — алгебра финитных последовательностей относительно поточечного умножения. Также мы обозначим через $c_{00}(S)$ алгебру финитных функций на множестве S относительно поточечного умножения.

Напомним важное понятие регулярного по фон Нойманну кольца, которое используется в доказательстве основной теоремы. Кольцо R называется *регулярным по фон Нойманну*, если для любого $a \in R$ элемент a принадлежит множеству aRa . Далее регулярные по фон Нойманну кольца мы будем называть *регулярными*. Хорошо известно, что алгебра комплексных последовательностей $\mathbf{C}^\infty$ с поточечным умножением является регулярной по фон Нойманну. Также известно, что регулярность сохраняется при переходе к биидеалам и расширениям колец (см. [2]).

Лемма 1. *Для любого натурального n алгебра $(c_{00}^+)^{\otimes n}$ регулярна.*

Доказательство. Алгебра $(c_{00})^{\otimes n}$ изоморфна алгебре $c_{00}(\mathbf{N}^n)$. Последняя алгебра является биидеалом в алгебре $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{N}^n)$ и поэтому регулярна. Алгебра c_{00}^+ является расширением регулярных алгебр c_{00} и $\mathbf{C}$ и, следовательно, также регулярна. Определим гомоморфизм

$$\gamma : (c_{00})^{\otimes k} \otimes (c_{00}^+)^{\otimes l} \rightarrow (c_{00})^{\otimes k} \otimes (c_{00}^+)^{\otimes (l-1)}$$

по формуле

$$\gamma(a \otimes (b + \lambda e) \otimes h) = \lambda a \otimes h,$$

где $a \in (c_{00})^{\otimes k}$, $b \in c_{00}^+$, $b \in c_{00}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $h \in (c_{00}^+)^{\otimes (l-1)}$, а e — присоединенная единица. Предположим, что

$$u = \sum_{j=1}^n a_j \otimes (b_j + \lambda_j e) \otimes h_j \quad \text{и} \quad \gamma(u) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \otimes h_j = 0 \quad \text{и} \quad u = \sum_{j=1}^n a_j \otimes b_j \otimes h_j.$$

Следовательно,

$$\text{Ker } \gamma = (c_{00})^{\otimes (k+1)} \otimes (c_{00}^+)^{\otimes (l-1)}.$$

Поэтому $(c_{00})^{\otimes k} \otimes (c_{00}^+)^{\otimes l}$ является расширением биидеала $(c_{00})^{\otimes(k+1)} \otimes (c_{00}^+)^{\otimes(l-1)}$ с помощью фактор-алгебры $(c_{00})^{\otimes k} \otimes (c_{00}^+)^{\otimes(l-1)}$. Используя индукцию по натуральному l , завершаем доказательство леммы.

Теорема 1. *Для любого натурального n выполнено равенство*

$$\text{db}(c_{00}^+)^{\otimes n} = 1.$$

Доказательство. Пусть J — ядро канонического оператора умножения $\pi : (c_{00}^+)^{\otimes n} \otimes (c_{00}^+)^{\otimes n} \rightarrow (c_{00}^+)^{\otimes n}$, определенного формулой $\pi(a \otimes b) = ab$ ($a, b \in (c_{00})^{\otimes n}$). Нетрудно видеть, что J как векторное подпространство $(c_{00}^+)^{\otimes 2n}$ имеет не более чем счетный линейный базис. По лемме Капланского ([3, Lemma 1]) любой счетно порожденный идеал регулярного кольца раскладывается в счетную прямую сумму идеалов, порожденных идемпотентами, и поэтому является проективным.

Из этого следует неравенство $\text{db}(c_{00}^+)^{\otimes n} \leq 1$.

Чтобы доказать оценку снизу достаточно найти непроективный модуль. Пусть $\chi : c_{00}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ — характер, определенный по формуле $\chi(a + \lambda e) = \lambda$. Тогда его тензорная степень $\chi^{\otimes n} : (c_{00}^+)^{\otimes n} \rightarrow \mathbf{C}$ определяет внешнее умножение на $\mathbf{C}$ и становится морфизмом левых модулей.

Пусть $v : \mathbf{C} \rightarrow (c_{00}^+)^{\otimes n}$ — морфизм левых модулей. Тогда

$$e_{r_1} \otimes e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_n} \cdot v(1) = v(e_{r_1} \otimes e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_n} \cdot 1) = \chi(e_{r_1})\chi(e_{r_2}) \cdots \chi(e_{r_n})v(1) = 0.$$

Поэтому морфизм $\chi^{\otimes n}$ не имеет левого обратного и модуль $\mathbf{C}$ не проективен. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть S — множество мощности $\aleph_k$, $k = 0, 1, \dots$; $n \in \mathbf{N}$. Тогда справедливо неравенство $\text{db } c_{00}^+(S)^{\otimes n} \leq k + 1$.*

Доказательство. По [4, Corollary 2.47] если каждый идеал кольца R порожден не более чем $\aleph_k$ элементами, то выполнено неравенство

$$\text{dg } R \leq \text{wdg } R + k + 1,$$

где $\text{wdg } R$ — глобальная плоская гомологическая размерность. Так же, как в теореме 1, можно доказать, что алгебра $c_{00}^+(S)^{\otimes n}$ регулярна. Как известно, все модули над регулярными кольцами плоские. Поэтому $\text{wdg } R = 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головин Ю. О., Хелемский А. Я. Гомологическая размерность некоторых модулей над тензорными произведениями банаховых алгебр. — Вестник МГУ. Сер. матем., мех., 1977, № 1, с. 54–61.
2. Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings. London e.a.: Pitman, 1979, xvii+369 p.
3. Kaplansky I. On the dimensions of modules and algebra, X. A right hereditary ring which is not left hereditary. Nagoya J. Math., 1958, v. 13, June, p. 85–88.
4. Osofsky B. L. Homological Dimensions of Modules. Providence, RI: AMS, 1971, ix+89 p. (Ser. CMBS Region. Conf. Ser. Math. № 12.)

УДК 512.66, 512.71

S. B. Tabaldyev (Moscow, Bauman Moscow State Technical University). **Non-additivity of homological bi-dimensions of tensor powers of some function algebra.**

Abstract: Let A be a tensor power of the algebra of sequences constant at infinity, then $\text{db } A = 1$, where $\text{db } A$ is the homological bi-dimension of the Banach algebra A .

Keywords: homological bi-dimension, projective module, von Neumann regular ring.