

Г. И. Белявский, М. А. Гирченко, Н. В. Данилова
(Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет). **Вычисление вероятности
невыхода случайного процесса из полосы.**

Рассматривается случайный процесс, подчиняющийся стохастическому дифференциальному уравнению: $dX_t = f(X_t)dt + \varphi(X_t)dW_t$ на конечном интервале $[0, T]$, с начальным значением X_0 , и коэффициентами, удовлетворяющими условию Липшица: $|f(x) - f(y)| + |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|$, гарантирующие существование и единственность сильного решения уравнения. Кроме этого предполагается, что коэффициент $\varphi(x) > 0$. Во многих приложениях необходимо на траекториях решения уравнения вычислять математическое ожидание $EI_{\{(\bar{X}_T < b) \wedge (\underline{X}_T > a)\}}$. Процессы $\bar{X}$ и $\underline{X}$ — супремумный и инфимумный процессы соответственно. Поскольку аналитического решения данной задачи в большинстве случаев не существует, то необходимо использовать численные методы.

Одно из возможных направлений получения численного метода — это применение метода Монте-Карло. Метод Монте-Карло предполагает воспроизведение траектории решения уравнения, вычисления $I_{\{(\bar{X}_T < b) \wedge (\underline{X}_T > a)\}}$ с последующим усреднением по траекториям. Численные методы решения стохастического дифференциального уравнения предполагают воспроизведение траектории при помощи дискретного множества точек $\{(\tau_i, X_i^\delta) : i = 1, 2, \dots, n\}$ связанного с разбиением интервала $[0, T]$ на n частей: $0 = \tau_0 < \dots < \tau_n = T$, с $\delta = \max(\tau_i - \tau_{i-1})$, которые приближенно равны соответствующим точкам $\{(\tau_i, X_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ на траектории решения дифференциального уравнения ($X_i = X_{\tau_i}$). Отметим, что близость точек $(\tau_i X_i^\delta)$ и $(\tau_i X_i)$, которая обычно достигается, не гарантирует близость $\bar{X}_n^\delta$ и $\bar{X}_T$, $\underline{X}_n^\delta$ и $\underline{X}_T$. В этом заключается основная проблема использования классического метода Монте-Карло для решения рассматриваемой в докладе задачи.

В предлагаемых методах рассматривается рандомизированное разбиение интервала: $[0, T]$. В первом методе используется рандомизированное разбиение Карра, которое позволяет использовать факторизацию Винера–Хопфа при вычислении $EI_{\{(\bar{X}_T < b) \wedge (\underline{X}_T > a)\}}$. Во втором методе разбиение осуществляется моментами остановки, связанными с винеровским процессом, при этом используется преобразование Гирсанова, для вычисления $EI_{\{(\bar{X}_T < b) \wedge (\underline{X}_T > a)\}}$.

В докладе приводятся результаты вычислительных экспериментов и обсуждаются достоинства и недостатки предложенных вычислительных методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-9-01038).