

Е. Н. А р у т ю н о в, А. А. К у д р я в ц е в, О. В. Ш е с т а к о в
(Москва, ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ). О дигамма-распределении как предельном в байесовской модели баланса.

УДК 519.2

DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Резюме: В докладе обсуждается предельная схема, основанная на интегральном индексе баланса. Приводится обобщение теоремы Реньи для распределений с параметром масштаба, на основе которой строится доказательство утверждения, показывающего слабую сходимость интегральных индексов баланса со случайным числом факторов к дигамма-распределению.

Ключевые слова: дигамма-распределение, интегральный индекс баланса, байесовские модели, слабая сходимость, теорема Реньи.

Байесовские модели баланса предусматривают разделение факторов, влияющих на эффективность функционирования системы, на два класса: r -факторов, способствующих функционированию системы, и p -факторов, негативно влияющих на систему.

Поскольку рандомизированные p - и r -факторы имеют распределения с положительным носителем, естественно в качестве априорных выбирать распределения из гамма-класса и рассматривать рандомизированный индекс баланса ρ — отношение p -фактора к r -фактору — как масштабную смесь обобщенных гамма-законов, которая может быть представлена в виде

$$\rho \stackrel{d}{=} \delta \left(\frac{\lambda}{\mu^r} \right)^{1/\nu}, \quad (1)$$

где независимые случайные величины λ и μ имеют гамма-распределения.

Ввиду того что плотность распределения смеси (1) описывается [1] в терминах специальных функций, более естественно исследовать данные смеси при помощи характеристической функции и преобразования Меллина. В работе [2] было предложено новое распределение как удобный инструмент исследования случайных величин вида (1).

Будем говорить, что случайная величина ζ имеет *дигамма-распределение* с характеристическим показателем $r \in \mathbb{R}$ и параметрами формы $\nu \neq 0$, концентрации $p, q > 0$ и масштаба $\delta > 0$, если ее преобразование Меллина задается соотношением

$$\mathcal{M}_\zeta(z) = \frac{\delta^z \Gamma(p + z/\nu) \Gamma(q - rz/\nu)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}, \quad p + \frac{\operatorname{Re}(z)}{\nu} > 0, \quad q - \frac{r\operatorname{Re}(z)}{\nu} > 0.$$

Рассмотрим некоторую сложную систему, на функционирование которой влияют негативные p -факторы $\xi_1, \xi_2, \dots$ и позитивные r -факторы $\eta_1, \eta_2, \dots$. Предположим, что в текущий момент времени t число факторов из каждой группы случайно и соответственно равно $N_\xi(t)$ и $N_\eta(t)$. Величину $\xi(t) = \xi_1 + \dots + \xi_{N_\xi(t)}$ будем называть *интегральным p -фактором*, а $\eta(t) = \eta_1 + \dots + \eta_{N_\eta(t)}$ — *интегральным r -фактором* системы. Назовем *интегральным индексом баланса* системы величину $\rho(t) = \xi(t)/\eta(t)$.

Предположим, что все используемые случайные величины и процессы независимы. Тогда для неотрицательной случайной величины Λ с параметром масштаба

δ , стандартного пуассоновского процесса $N_1(t)$ и последовательности одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ с конечным математическим ожиданием $E\xi_1 = a \neq 0$ справедливо обобщение теоремы Реньи, т. е. если $E\Lambda < \infty$, $\hat{\Lambda} \stackrel{d}{=} \Lambda/\delta$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, то

$$\frac{S_{N_1(\Lambda t)}}{a\delta t} \Longrightarrow \hat{\Lambda}, \quad \delta t \rightarrow \infty.$$

Более того, если случайное число негативных п-факторов и позитивных р-факторов имеют смешанные пуассоновские распределения со структурными обобщенными гамма-распределениями с параметрами масштаба δ_1 и δ_2 , имеет место сходимость [3]

$$\frac{\rho(t)}{\delta_1/\delta_2} \Longrightarrow \zeta, \quad \delta_1 t, \delta_2 t \rightarrow \infty,$$

где ζ имеет дигамма-распределение.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-07-00655).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов Е. Н., Кудрявцев А. А., Недомивко Ю. Н. Вероятностные характеристики индекса баланса факторов, имеющих обобщенные гамма-распределения. — Информатика и ее применения, 2021, т. 15, в. 1, с. 65–71.
2. Кудрявцев А. А., Недомивко Ю. Н., Шестаков О. В. Основные вероятностные характеристики дигамма-распределения и метод оценивания его параметров. — Вестник Московского ун-та. Сер 15. Вычисл. матем. и киберн., 2022, № 2, с. 22–29.
3. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Дигамма-распределение как предельное для интегрального индекса баланса. — Вестник Московского ун-та. Сер 15. Вычисл. матем. и киберн., 2022, № 3, с. 18–24.

УДК 519.2

Arutyunov E. N., Kudryavtsev A. A., Shestakov O. V. (Moscow, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences; Moscow, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University). **On the digamma-distribution as a limit in the Bayesian balance model.**

Abstract: The report discusses the limit scheme based on the integral balance index. A generalization of Rényi’s theorem for distributions with a scale parameter is given, on the basis of which the proof of the statement is constructed, showing the weak convergence of the integral balance indices with a random number of factors to the digamma-distribution.

Keywords: digamma-distribution, integral balance index, Bayesian models, weak convergence, Rényi’s theorem