ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 29 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2022

**С. Е. Холодовский** (Чита, ЗабГУ). **О влиянии сильно (слабо) проницаемых пленок на процессы тепломассопереноса.**

УДК 517.956 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

*Резюме*: Рассмотрены краевые задачи для уравнения Пуассона на плоскости с обобщенными условиями сопряжения на прямой. Задачи моделируют процессы тепломассопереноса на плоскости, содержащей сильно- или слабо проницаемую пленку. Получены явные решения задач, из которых выведены некоторые закономерности влияния пленок на процессы.

*Ключевые слова*: сильно- и слабо проницаемые пленки, метод свертывания разложений Фурье.

Рассмотрим на плоскости для потенциалов $u_i(x,y)$ две задачи:

$$\Delta u_1 = 0, \qquad x < 0;, \qquad \Delta u_2 = F(x,y), \qquad x > 0, \tag{1}$$

$$x = 0: \qquad u_2 - u_1 = B\frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = A\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа; $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$ — постоянные, одна из которых равна нулю, $F(x,y)$ — заданная функция, для которой существует решение $f(x,y)$ классической задачи на плоскости вида $\Delta f = F(x,y)$, где $F(x,y) \equiv 0$ при $x \leqslant 0$.

Задачи (1), (2) описывают установившиеся процессы тепломассопереноса на плоскости, содержащей сильно- или слабо проницаемую пленку $x = 0$ соответственно при $A > 0, B = 0$ или при $B > 0, A = 0$ [1]. Функция $f(x,y)$ является потенциалом аналогичных процессов на всей плоскости без пленки, т. е. $f(x,y)$ — гармоническая на всей плоскости функция, имеющая заданные особые точки (источники, стоки и т. д.) при $x > 0$. Например, для источника в точке $(x_0, y_0)$ имеем $f(x,y) = Q\ln[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]$, $x_0 > 0$.

Следуя методу свертывания разложений Фурье [1], решения задач (1), (2) выражаются через функцию $f(x,y)$ в виде

$$u_1 = \gamma\int_0^\infty e^{-\gamma t} f(x-t,y)\,dt, \qquad u_2 = f(x,y) - f(-x,y) + \gamma\int_0^\infty e^{-\gamma t} f(-x-t,y)\,dt, \tag{4}$$

$(\gamma = 2/A)$ в случае сильно проницаемой пленки и

$$u_1 = \gamma\int_0^\infty e^{-\gamma t} f(x-t,y)\,dt, \qquad u_2 = f(x,y) + f(-x,y) - \gamma\int_0^\infty e^{-\gamma t} f(-x-t,y)\,dt, \tag{5}$$

$(\gamma = 2/B)$ в случае слабо проницаемой пленки $x = 0$.

Из выражений (4) при $A \to 0$ ( $\gamma \to \infty$ ), интегрированием по частям, получаем $u_{1,2}(x,y) \to f(x,y)$, т. е. пленка исчезает. При $A \to \infty$ ( $\gamma \to 0$ ) из (4) находим $u_1(x,y) \to 0$, $u_2(x,y) \to f(x,y) - f(-x,y) \equiv U(x,y)$, где $U(x,y)$ — решение задачи Дирихле в полуплоскости: $\Delta U = F(x,y)$, $x > 0$; $U_{|x=0} = 0$, т. е. пленка $x = 0$ является абсолютно проницаемой каверной, при этом при $x < 0$ процесс отсутствует.

Из выражений (5) при $B \to 0$ ( $\gamma \to \infty$ ) следует $u_{1,2} \to f(x,y)$, т. е. пленка исчезает. При $B \to \infty$ ( $\gamma \to 0$ ) из (5) получим $u_1(x,y) \to 0$, $u_2(x,y) \to f(x,y) + f(-x,y) \equiv$

$V(x, y)$, где $V(x, y)$ — решение задачи Неймана: $\Delta V = F(x, y)$, $x > 0$; $\partial V / \partial x_{|x=0} = 0$, т. е. пленка $x = 0$ вырождается в непроницаемый экран.

Таким образом, потенциалы (4), (5) описывают процессы тепломассопереноса на плоскости с сильно- и слабо проницаемыми пленками в диапазоне от абсолютно проницаемой каверны до непроницаемого экрана $x = 0$.

Из формул (4) следует равенство $u_2(x, y) - f(x, y) = u_1(-x, y) - f(-x, y)$, $x > 0$. Отсюда при внесении в невозмущенный пленкой поток с потенциалом $f(x, y)$ сильно проницаемой пленки приращения потенциалов и составляющих скоростей $v_{iy} = \partial u_i / \partial y$ в точках, симметричных относительно пленки $x = 0$, одинаковые, а приращения составляющих скоростей $v_{ix} = \partial u_i / \partial x$ отличаются лишь знаками.

Из формул (5) следует равенство $u_2(x, y) - f(x, y) = f(-x, y) - u_1(-x, y)$, $x > 0$. Отсюда при внесении в поток с потенциалом $f(x, y)$ слабо проницаемой пленки приращения потенциалов и составляющих скоростей $v_{iy}$ в точках, симметричных относительно пленки $x = 0$, отличаются лишь знаками, а приращения составляющих скоростей $v_{ix}$ одинаковые. В частности, в задачах теплопроводности при внесении слабо проницаемой пленки температура в зоне расположения источников $x > 0$ повышается, а в зоне $x < 0$ понижается.

Работа выполнена в рамках гранта Совета по НиИД Заб.ГУ (проект 358-ГР).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах. — Дифференциальные уравнения, 2009, т. 45, №6, с. 855–859. // *Kholodovskii S. E.* The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media. — Differential Equations, 2009, v. 45, №6, p. 873–877.

UDC 517.956 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

***Kholodovskii S. E.*** (Chita, Trans-Baikal State University). **On the influence of strongly (weakly) permeable films on the processes of heat and mass transfer.**

*Abstract*: Problems for the Poisson equation on a plane with generalized conjugation conditions on a straight line are considered. The tasks simulate the processes of heat and mass transfer on a plane containing a strongly or weakly permeable film. Explicit solutions of problems have been obtained, from which some regularities of the influence of films on processes have been derived.

*Keywords*: strongly and weakly permeable films, the method of convolution of Fourier expansions.