**О Б О З Р Е Н И Е**
**П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й**
**Т о м 29** **М А Т Е М А Т И К И** **В ы п у с к 1**
**2022**

**А. В. К а л и н к и н**, **С. С. К у д р я ш о в** (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Марковские аналоги основных детерминированных моделей эпидемий.**

УДК 519.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

*Резюме*: Приведены кинетические схемы взаимодействий, соответствующие детерминированным моделям эпидемий SIR, SIS, SIRS, SEIS, SEIR, MSEIRS.

*Ключевые слова*: Модели эпидемий, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, марковские процессы.

В 1927 г. В. О. Кермак и А. Г. Мак-Кендрик предложили детерминированную модель развития эпидемии, в популяции с постоянной численностью особей,

$$\dot{x}_1 = -x_1x_2,\ \dot{x}_2 = x_1x_2 - \lambda x_2, \qquad x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0, \tag{1}$$

где $x_1(t)$ — количество «восприимчивых к заболеванию», $x_2(t)$ — количество «инфицированных» в момент времени $t$ $(\lambda > 0)$. Получившую название эпидемии SIR.

В 40-е гг. М. С. Бартлетт и другие авторы определили стохастический аналог эпидемии SIR [2]. Рассматривают однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0,\infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{\alpha = (\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha_1,\alpha_2 = 0,1,\ldots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1,\beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1,\alpha_2)\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде $P_{(\alpha_1-1,\alpha_2+1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \alpha_1\alpha_2 t + o(t)$, $P_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \lambda\alpha_2 t + o(t)$, $P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - (\alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_2)t + o(t)$. Производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t;s) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$, $|s_1| \leqslant 1$, $|s_2| \leqslant 1$, удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [2]

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = (s_2^2 - s_1s_2)\frac{\partial^2 F_\alpha(t;s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda(1-s_2)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_2}, \qquad F_\alpha(0;s_1,s_2) = s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}. \tag{2}$$

Из уравнения (2) «предельным термодинамическим переходом» выводится нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Уравнению (2) соответствует кинетическая схема взаимодействий $T_1 + T_2 \to 2T_2$, $T_2 \to 0$ [4].

В теории эпидемий используются обозначения [1]:

S — susceptible, восприимчивые к заболеванию;

I — infectious, инфицированные, могут передавать заболевание;

R — recovered (or immune), выздоровевшие, с иммунитетом;

E — for exposed (or significant latency period), инфицированные, находящиеся в латентном периоде, то есть не могут передавать заболевание;

M — passive immunity, младенцы с пассивным иммунитетом; и другие буквы.

На этой основе в литературе ([1] и др.) классифицируются модели эпидемий SIR, SIS, SIRS, SEIS, SEIR, MSEIRS и другие, в некоторых случаях выписываются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ этих нелинейных систем на основе «предельного термодинамического перехода» приводит к следующим схемам взаимодействий [3]:

марковский процесс эпидемии SIR $T_1 + T_2 \to 2T_2,\ T_2 \to 0$;

марковский процесс эпидемии SIS $T_1 + T_2 \to 2T_2,\ T_2 \to T_1$ ;

марковский процесс эпидемии SIRS $T_1 + T_2 \to 2T_2,\ T_2 \to T_1, T_3,\ T_3 \to T_1$ ;

марковский процесс эпидемии SEIS $T_1 + T_2 \to T_2 + T_4,\ T_2 \to T_1,\ T_4 \to T_2,\ 0 \to T_1,\ T_1 \to 0,\ T_2 \to 0,\ T_4 \to 0$ ;

марковский процесс эпидемии SEIR $T_1 + T_2 \to T_2 + T_4,\ T_4 \to T_2,\ T_2 \to T_3,\ 0 \to T_1,\ T_1 \to 0,\ T_2 \to 0,\ T_3 \to 0,\ T_4 \to 0$ ;

марковский процесс эпидемии MSEIRS $T_1 + T_5 \to 2T_1,\ T_1 + T_2 \to T_2 + T_4,\ T_4 \to T_2,\ T_2 \to T_3,\ T_3 \to T_1,\ 0 \to T_5,\ T_1 \to 0,\ T_2 \to 0,\ T_3 \to 0,\ T_4 \to 0,\ T_5 \to 0$.

Аналогично находятся кинетические схемы марковских процессов эпидемий MSIR, MSEIR и некоторых других. По схеме взаимодействий выписывается второе уравнение Колмогорова в производящих функциях, подобное линейному уравнению в частных производных (2) [4].

Отметим, что принятые в математической эпидемиологии последовательности латинских букв не определяют однозначно детерминированную модель эпидемии — систему ОДУ. Для определения кинетической схемы (которая однозначно определяет марковский процесс), необходимо наличие системы ОДУ. Выше использованы данные в обзоре [1] нелинейные системы уравнений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_modelling_of_infectious_disease
   https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology
2. *Севастьянов Б. А.* Эпидемии процесс. — В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. Кол. 1008. // *Sevast'yanov B. A.* Epidemic process. Encyclopaedia of Mathematics. Vol. 3. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1989.
3. *Кудряшов С. С.* Стохастические аналоги основных детерминированных моделей эпидемий. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 144 с. // *Kudryashov S. S.* Stochastic analogues of the main deterministic models of epidemics. Graduation thesis. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2014, 144 p. (In Russian.)
4. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи математических наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 3–84. // *Kalinkin A. V.* Markov branching processes with interaction. — Russian Math. Surveys, 2002, v. 57, № 2, p. 241–304.


UDC 519.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

***Kalinkin A. V.***, ***Kudryashov S. S.*** (Moscow, Bauman Moscow State Technical University). **Markov analogues of the main deterministic models of epidemics.**

*Abstract*: The kinetic schemes of interactions corresponding to the deterministic models of epidemics SIR, SIS, SIRS, SEIS, SEIR, MSEIRS are given.

*Keywords*: Models of epidemics, systems of ordinary differential equations, Markov processes.