О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 29 **М А Т Е М А Т И К И** **В ы п у с к 1**
2022

Н. В. В о р о п а е в а, **С. Е. Л я н к и н** (Самара, Самарский университет). **Редукция математической модели колесного робота.**

УДК 517.9 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Резюме: Рассматривается сингулярно возмущенная модель мобильного колесного робота. Производится редукция модели с использованием метода интегральных многообразий.

Ключевые слова: Колесные роботы, сингулярно возмущенные дифференциальные системы, интегральные многообразия.

В работе рассматривается математическая модель мобильного робота с двумя ведущими колесами [1]. Робот представляет собой сложную электро-механическую систему, характерной особенностью которой является наличие процессов с существенно различными скоростями протекания.

Математическая модель робота представляет собой сингулярно возмущенную дифференциальную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 + y_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 + y_2 \\ \varepsilon \dot{y}_1 &= -x_1 - y_1 + u_\sigma \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= -\nu x_2 - y_2 + u_\delta, \end{aligned} \tag{1}$$

где безразмерные переменные x_1, x_2 характеризуют механические процессы (линейная скорость точки и угловая скорость платформы), y_1, y_2 характеризуют электрические процессы (токи во внешних цепях электродвигателей), безразмерный параметр ν отражает массо-габаритные характеристики робота. Предполагается малость постоянной времени $\varepsilon = L/R$ переходного процесса в цепях электродвигателя, характеризующей «время запаздывания» в цепях управления ведущими колесами. Здесь L — обобщенная индуктивность цепи электродвигателя, R — омическое сопротивление цепи ротора. Управляющими воздействиями являются $u_\sigma = u_1 + u_2$, $u_\delta = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 — ЭДС, приложенные к электродвигателям.

Следуя [2] можно доказать, что у системы (1) существует притягивающее интегральное многообразие медленных движений вида

$$y_1 = h_1(x_1, x_2, \varepsilon), \quad y_2 = h_2(x_1, x_2, \varepsilon), \tag{2}$$

где функции h_1, h_2 могут быть построены с любой степенью точности в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε

$$h_i(x_1, x_2, \varepsilon) = h_i^{(0)}(x_1, x_2) + \varepsilon h_i^{(1)}(x_1, x_2) + \cdots, \qquad i = 1, 2 \tag{3}$$

из уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon \tfrac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_2^2 + h_1) + \varepsilon \tfrac{\partial h_1}{\partial x_2}(-x_1 x_2 + h_2) = -x_1 - h_1 + u_\sigma, \\ &\varepsilon \tfrac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_2^2 + h_1) + \varepsilon \tfrac{\partial h_2}{\partial x_2}(-x_1 x_2 + h_2) = -\nu x_2 - h_2 + u_\delta \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (3) в уравнения (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, ввиду линейности системы (1) по быстрым переменным y_1, y_2, получаем линейные алгебраические системы относительно коэффициентов асимптотических разложений интегрального многообразия

$$-x_1 - h_1^{(0)} + u_\sigma = 0, \quad -\nu x_2 - h_2^{(0)} + u_\delta = 0,$$

$$\frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial x_1}(x_2^2 + h_1^{(0)}) + \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial x_2}(-x_1x_2 + h_2^{(0)}) = -h_1^{(1)}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial h_2^{(0)}}{\partial x_1}(x_2^2 + h_1^{(0)}) + \frac{\partial h_2^{(0)}}{\partial x_2}(-x_1x_2 + h_2^{(0)}) = -h_2^{(1)}.$$

Решая системы (5), получаем

$$\begin{aligned} h_1(x_1,x_2,\varepsilon) &= -x_1 + u_\sigma + \varepsilon(x_2^2 - x_1 + u_\sigma) + O(\varepsilon^2) \\ h_2(x_1,x_2,\varepsilon) &= -\nu x_2 + u_\delta + \varepsilon(-\nu x_1 x_2 + \nu u_\delta - \nu^2 x_2) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 + h_1(x_1,x_2,\varepsilon) \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_2 + h_2(x_1,x_2,\varepsilon), \end{aligned} \tag{7}$$

описывающая движение на интегральном многообразии медленных движений (2), представляет собой редуцированную модель рассматриваемой системы (1). С точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ она принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 - x_1 + u_\sigma + \varepsilon(x_2^2 - x_1 + u_\sigma) \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_2 - \nu x_2 + u_\delta + \varepsilon(-\nu x_1 x_2 + \nu u_\delta - \nu^2 x_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) имеет размерность в два раза меньше исходной, не содержит разнотемповых переменных, но, тем не менее, адекватно отражает поведение исходной системы. Если в системе (8) положить $\varepsilon = 0$, получим хорошо изученную порождающую систему.

На основе анализа редуцированной модели (8) изучен характер устойчивости стационарных решений системы при фиксированных значениях управляющих параметров $u_\sigma = const$, $u_\delta = 0$ для различных соотношений между параметрами системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартыненко Ю. Г.* Управление движением мобильных колесных роботов. — Фундаментальная и прикладная математика, 2005, т. 11, № 8, с. 29–80. // *Martynenko Yu. G.* Motion control of mobile wheeled robots. — Journal of Mathematical Sciences, 2007, v. 147, No 2, p. 6569–6606.
2. *Воропаева Н. В.*, *Соболев В. А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009, 256 с. // *Voropaeva N. V.*, *Sobolev V. A.* Geometric decomposition of singularly perturbed systems. Moschow: Fizmatlit, 2009, 256 p.(In Russian.)

UDC 517.9 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Voropaeva N. V., ***Lyankin S. E.*** (Samara, Samara National Research University).**The reduction of the wheeled robot mathematical model.**

Abstract: A singularly perturbed model of a wheeled robot is considered. The model is reduced using the theory of integral manifolds.

Keywords: Wheeled mobile robots, singularly perturbed differential systems, integral manifolds.