ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 29 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2022

Г. С. Осипов (Южно-Сахалинск, СахГУ). **Теория и практика решения обратных задач для нечетких полиномиальных уравнений с импликаторами.**

УДК 004.891.3 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Резюме: изложены результаты исследований в области решения обратных задач с нечеткими соответствиями. Изложены утверждения о необходимом и достаточном условии существования решения для полиномиальных уравнений. Представлена методология и практическая реализация нечетких обратных задач в пакете символьной математики Wolfram Mathematica.

Ключевые слова: нечеткие соответствия, обратные задачи с импликаторами.

Рассмотрим нечеткое уравнение $\widetilde{A}\circ\widetilde{X}=\widetilde{Y}$, где $\widetilde{A}(A\times B)$, $\widetilde{X}(B\times C)$, $\widetilde{Y}(A\times C)$ — нечеткие соответствия, A, B и C — непустые (четкие) множества.

Перейдем к более удобному матричному представлению уравнения $A\circ X=Y$.

Обратной (правой) задачей для нечеткого уравнения называется задача нахождения представления нечеткого соответствия X при заданных A,Y и правиле композиции $\circ$.

Отметим, что обратная задача является принципиально сложной (может иметь интервальные решения или не иметь решений вообще).

$$a=(a_i)_{i=\overline{1,n}}=(a_1a_2\dots a_n),\quad x=(x_i)_{i=\overline{1,n}}=(x_1x_2\dots x_n),$$

Пусть

$$a_i,x_i(i=\overline{1,n}),\quad y\in[0,1].$$

Нечетким полиномиальным уравнением называется уравнение вида $a\circ x=y$.

Исследуем уравнения вида $\min_{i=\overline{1,n}}(I(a_i,x_i))=y$ с импликаторами:

$$I_m(\alpha,\beta)=\max(1-\alpha,\beta);\quad I_p(\alpha,\beta)=1-\alpha+\alpha\beta;\quad I_W(\alpha,\beta)=\min(1-\alpha+\beta,1).$$

Утверждение. *Для того, чтобы введенное уравнение имело решение* $x^0=(x_1^0x_2^0\cdots x_n^0)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\exists j(1\leqslant j\leqslant n):a_j\geqslant 1-y$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть x^0 — решение задачи. Это значит, что существует по крайней мере одно число $1\leqslant j\leqslant n$ для которого выполняется равенство $I(a_j,x_j^0)=y$, а это означает, что $a_j\geqslant 1-y$ (см. решение простейших уравнений).

Таким образом справедливо утверждение

$$\exists x^0=x^0=(x_1^0x_2^0\cdots x_n^0)\Rightarrow\exists j_{[1,n]}:a_j\geqslant 1-y.$$

Достаточность. Пусть $\exists j_{[1,n]}:a_j\geqslant 1-y$, тогда хотя одно из уравнений $I(a_j,x_j^0)=y$ имеет решение, следовательно:

$$\min_i(I(a_i,x_i))=\min(I(a_1,x_1)\geqslant y,I(a_2,x_2)\geqslant y,\dots,I(a_j,x_j)=y,\dots)=y.$$

Таким образом справедливо утверждение $\exists j_{[1,n]} : a_j \geqslant 1 - y \Rightarrow \exists x^0 = (x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0)$.

Пусть $u = \left[\begin{array}{c|l} y & I_m \\ \frac{a_i+y-1}{a} & I_p \\ a_i+y-1 & I_w \end{array}\right.$, тогда компоненты минимального решения найдутся так:

$$\underline{x_i}^0 = \left[\begin{array}{c|l} 0 & a_i \leqslant 1-y \\ u & a_i > 1-y \end{array}\right. \quad (i=\overline{1,n}).$$

Пусть $Q = \{i : a_i \geqslant 1 - y\}$.

Компоненты максимальных решений:

$$\overline{x}_i^0(k) = \left[\begin{array}{l} 1| \ \ a_i < 1-y \\ u| \quad\ i \in Q \\ 1| \quad\ i \notin Q \end{array}\right. \qquad (k=1,\ |Q|,\ i=\overline{1,n}).$$

П р и м е р. Пусть $a \circ x = y = (0{,}2\ 0{,}7\ 0{,}5\ 0{,}8) \circ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = 0{,}7$.

При использовании трех рассматриваемых импликаторов для нечеткого уравнения получим следующие три уравнения:

$$\begin{cases} \min(\max(1-a_1,x_1),\max(1-a_2,x_2),\max(1-a_3,x_3),\max(1-a_4,x_4)) = y \\ \min(1+a_1(x_1-1),1+a_2(x_2-1),1+a_3(x_3-1),1+a_4(x_4-1)) = y \\ \min(\min(1-a_1+x_1,1),\min(1-a_2+x_2,1),\min(1-a_3+x_3,1),\max(1-a_4+x_4,1)) = y \end{cases}$$

В таблице представлены решения полученных уравнений при различных импликаторах, там же приведены максимальные и минимальные решений.

Таблица. Решения полиномиального уравнения с импликаторами

I	x^0	$\overline{x}^0$	$\underline{x}^0$
I_m	$0 \leqslant x_1^0 \leqslant 1 \left[\begin{array}{l} x_2^0 = 0{,}7 \quad 0{,}7 \leqslant x_3^0 \leqslant 1 \quad 0{,}7 \leqslant x_4^0 \leqslant 1 \\ 0{,}7 < x_2^0 \leqslant 1 \left[\begin{array}{l} x_3^0 = 0{,}7 \quad 0{,}7 \leqslant x_4^0 \leqslant 1 \\ 0{,}7 < x_3^0 \leqslant 1 \quad x_4^0 = 0{,}7 \end{array}\right. \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} (1\ 0{,}7\ 1\ 1) \\ (1\ 1\ 0{,}7\ 1) \\ (1\ 1\ 1\ 0{,}7) \end{array}\right.$	$(0\ 0{,}7\ 0{,}7\ 0{,}7)$
I_p	$0 \leqslant x_1^0 \leqslant 1 \left[\begin{array}{l} x_2^0 = 4/7 \quad 0{,}4 \leqslant x_3^0 \leqslant 1 \quad 5/8 \leqslant x_4^0 \leqslant 1 \\ 4/7 < x_2^0 \leqslant 1 \left[\begin{array}{l} x_3^0 = 0{,}4 \quad 5/8 \leqslant x_4^0 \leqslant 1 \\ 0{,}4 < x_3^0 \leqslant 1 \quad x_4^0 = 5/8 \end{array}\right. \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} (1\ 4/7\ 1\ 1) \\ (1\ 1\ 0{,}4\ 1) \\ (1\ 1\ 1\ 5/8) \end{array}\right.$	$(0\ 4/7\ 0{,}4\ 5/8)$
I_w	$0 \leqslant x_1^0 \leqslant 1 \left[\begin{array}{l} x_2^0 = 0{,}4 \quad 0{,}2 \leqslant x_3^0 \leqslant 1 \quad 0{,}5 \leqslant x_4^0 \leqslant 1 \\ 0{,}4 < x_2^0 \leqslant 1 \left[\begin{array}{l} x_3^0 = 0{,}2 \quad 0{,}5 \leqslant x_4^0 \leqslant 1 \\ 0{,}2 < x_3^0 \leqslant 1 \quad x_4^0 = 0{,}5 \end{array}\right. \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} (1\ 0{,}4\ 1\ 1) \\ (1\ 1\ 0{,}2\ 1) \\ (1\ 1\ 1\ 0{,}5) \end{array}\right.$	$(1\ 0{,}4\ 0{,}2\ 0{,}5)$

Обратные задачи для систем полиномиальных уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

на базе импликаторов решаются по схеме:

$$\left\{ \min_k (I(a_{ik}, x_k)) = y_i \ (i = \overline{1,m}). \right.$$

Уравнения общего вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приводят к следующей схеме решения обратной задачи:

$$\{ \min_k (I(a_{ik}, x_{kj})) = y_{ij} \ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}).$$

Очевидно обратная задача в данном случае сводится к решению n независимых систем полиномиальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Г. С.*, *Осипова Е. В.* О решении обратных задач с нечеткими соответствиями. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 3, с. 275–277. DOI: 10.18411/OPPM-2019-26-3. // *Osipov G. S.*, *Osipova E. V.* About Solving Inverse Problems with Fuzzy Matches. — Review of Applied and Industrial Mathematics, 2019, v. 26, № 3, p. 275–277. (in Russian).
2. *Осипов Г. С.* Решение задач нечеткой диагностики в пакете символьной математики Wolfram Mathematica. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2020, т. 27, в. 12, с. 162–164. DOI: 10.18411/OPPM-2020-27-1. // Osipov G. S. Solving fuzzy diagnostics problems in the symbolic mathematics package Wolfram Mathematica. — Review of Applied and Industrial Mathematics, 2020, v. 27, № 12, p. 162–164. (in Russian).

UDC 004.891.3 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Osipov G. S. (Yuzhno-Sakhalinsk, Sakhalin State University). **Theory and practice of solving inverse problems for fuzzy polynomial equations with implicators.**

Abstract: the results of research in the field of solving inverse problems with fuzzy correspondences are presented. Statements about the necessary and sufficient condition for the existence of a solution for polynomial equations are presented. The methodology and practical implementation of fuzzy inverse problems in the symbolic mathematics package Wolfram Mathematica are presented.

Keywords: нечеткие соответствия, обратные задачи с импикаторами.