ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 29 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2022

**М. С. Тихов** (Нижний Новгород, ННГУ). **О характеризации распределения Пуассона.**

УДК 519.2 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

*Резюме*: В 1986 г. Ч. Стейн дал доказательство характеризации распределения Пуассона. Используя соотношения между начальными моментами, мы даем другое доказательство этой характеризации.

*Ключевые слова*: Распределение Пуассона, характеризация, соотношения для моментов.

В конце 60-х годов Ch. Stein [1] разработал новый способ доказательства центральной предельной теоремы, который стал популярен в последнее время для зависимых случайных величин, более того, он дает скорость сходимости допредельного и предельного распределений. По-сути, основой его метода была характеризация нормального распределения.

**Теорема 1.** *Случайная величина $Z$ имеет стандартное нормальное распределение если и только если*

$$\mathbf{E}(f'(Z)) - \mathbf{E}(Z \cdot f(Z)) = 0 \tag{1}$$

*для любой непрерывной или кусочно непрерывно дифференцируемой функции $f$, для которой ожидания существуют.*

L. Chen в [2] расширил метод Стейна на пуассоновское распределение (см. также [3]): случайная величина $Z$, принимающая значения $0, 1, 2, \dots$ имеет распределение Пуассона тогда и только тогда, когда для всякой ограниченной функции $f(x)$, определенной на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$ имеет место равенство

$$\mathbf{E}(\lambda f(Z+1)) = \mathbf{E}(Zf(Z)), \qquad \lambda > 0. \tag{2}$$

В [4] приведено доказательство этой характеризации, но оно несколько громоздко. Мы приведем другое доказательство теоремы 2 (как необходимое, так и достаточное условие), основанное на связи начальных моментов Пуассоновского распределения. Заметим, что для центральных моментов $\nu_r = \mathbf{E}\left((Z - \mathbf{E}(Z))^r\right)$, где $Z$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda$, в монографии [5], с. 179 показано, что

$$\nu_r = \lambda \sum_{j=0}^{r-2} \binom{r-1}{j} \nu_j, \qquad r = 2, 3, \dots$$

**Теорема 2.** *Случайная величина $Z \in \mathcal{P}(\lambda)$ (т. е. имеет распределение Пуассона), тогда и только тогда, когда для любой ограниченной функции $f : \mathbf{N} \bigcup \{0\} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{E}(\lambda f(Z+1)) - \mathbf{E}(Zf(Z)) = 0$, $\lambda > 0$.*

Доказательство. Пусть $Z \in \mathcal{P}(\lambda)$. Тогда

$$\mathbf{E}(\lambda f(Z+1)) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \frac{\lambda^j}{(j-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot f(j) \, \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot f(j) \, \frac{\lambda^j}{j!} = \mathbf{E}\,(Zf(Z)).$$

Пусть теперь равенство (2) имеет место. Возьмем в качестве функций $f(x)$ функции $x^r, r = 0, 1, \ldots,$ и рассмотрим сначала биномиальное распределение $X \in B(n, p)$. Его характеристическая функция равна

$$\varphi = \varphi_X(t) = (q + pe^{\theta})^n, \qquad q = 1 - p, \quad 0 < p < 1, \quad \theta = it.$$

Обозначим $\mu_k = \mathbf{E}(X^k)$ — начальный момент порядка $k$ и разложим $\varphi$ в ряд по $\theta$:

$$\varphi = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j \theta^j}{j!} = (q + pe^{\theta})^n.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по $\theta$, получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j \theta^{j-1}}{(j-1)!} = np\,(q + pe^{\theta})^{n-1} e^{\theta} = \frac{npe^{\theta}}{q + pe^{\theta}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j \theta^j}{j!}.$$

Умножая обе части на $q + pe^{\theta}$, мы будем иметь:

$$(q + pe^{\theta}) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j \theta^{j-1}}{(j-1)!} = npe^{\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j \theta^j}{j!}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\theta^r$, находим следующие выражения для начального момента $(r+1)-$ го порядка через такие же моменты более низкого порядка:

$$\mu_{r+1} = np \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \mu_j - p \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \mu_{j+1}. \tag{3}$$

Далее, согласно определению

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{n} j^r \binom{n}{j} (1-p)^{n-j} p^j.$$

Дифференцируя по $p$, имеем

$$\frac{d\mu_r}{dp} = -\sum j^r \binom{n}{j} q^{n-j-1} (n-j) p^j + \sum j^{r+1} \binom{n}{j} q^{n-j} p^{j-1}.$$

Сумма двух слагаемых в правой части равна

$$\frac{1}{pq} \sum j^{r+1} \binom{n}{j} q^{n-j} p^j = \frac{1}{pq}\, \mu_{r+1},$$

и, следовательно,

$$\mu_{r+1} = np\mu_r + pq\, \frac{d\mu_r}{dp}. \tag{4}$$

Пусть теперь $p \to 0$ при $n \to \infty$, но так, что $np \to \lambda > 0$. Если в (3) и (4) перейти к пределу при $n \to \infty$, то получим

$$\mu_{r+1} = \mathbf{E}(Z^{r+1}) = \mathbf{E}(Z \cdot Z^r) = \lambda \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \mu_j = \lambda \mathbf{E}((Z+1)^r), \tag{5}$$

где $\mu_0 = 1$, а величина $Z$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda$ и

$$\mu_{r+1} = \lambda \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \mu_j \quad \text{и} \quad \mu_{r+1} = \lambda\mu_r + \lambda \frac{d\mu_r}{d\lambda}\,.$$

Тем самым, из соотношения (5) следует, что при $f(x) = x^r, r = 0, 1, \ldots,$ мы получаем моменты Пуассоновского распределения с параметром $\lambda$ и так как условие Карлемана выполнено, то соответствующий ряд будет иметь ненулевой радиус сходимости в комплексной плоскости и, таким образом, это будет единственное распределение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Stein Ch.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist., Probab. Univ. California Press, Berkeley, 1972, №2, p. 583–602.
2. *Chen L.* Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, p. 534–545.
3. *Barbour A.*, *Holst L.*, *Jonson S.* Poisson Approximation. V.2. Oxford Studies in Probability. — N.Y.: Oxford Univ. Press, Clarendon Press, 1992, 278 p.
4. *Stein Ch.* Approximation Computation of Expectations, — Math. Stat. Lect. Notes. Monogr. Ser. V.7. Hayward (Calif.): Inst. Math. Statist., 1986, 167 p.
5. *Кендалл М.*, *Стьюарт А.* Теория распределений. М.: Наука, 1966, 588 с.

   *Kendall M.*, *Stuart A.* The Advanced Theory of Statistics, vol.1: Distribution Theory. London: Charles Griffin, 1945, 457 p.


UDC 519.2 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

***Tikhov M. S.*** (Nizhny Novgorod, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod). **On the characterization of the Poisson distribution.**

*Abstract*: In 1986 the Ch. Stein proved a characterization of the Poisson. Using the relations for the moments of the Poisson distribution, we give another proof of this characterization.

*Keywords*: Poisson distribution, characterization, relations for the moments.