ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 28 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2021

А. В. Боков (Пятигорск, РЭУ им. Г. В. Плеханова). **Особенности численного моделирования турбулентной конвекции в путепроводе тоннельного типа.**

УДК

Резюме: Представлена математическая модель турбулентного течения жидкости, предназначенная для проведения численных экспериментов при проектировании путепроводов трубного и тоннельного типа.

Ключевые слова: Ключевые слова: высокоскоростные транспортные системы, математическое моделирование, газодинамика, отведение воздуха, давление, скорость.

Одним из направлений развития транспортной системы городской агломерации и региона является создание высокоскоростных транспортных магистралей. В научной и профессиональной среде активно обсуждаются перспективы развития вакуумных транспортных систем и транспортных магистралей тоннельного и трубного типа [1–4]. Задачу проектирования таких систем существенно облегчает численный эксперимент на основе математического моделирования турбулентных течений воздушных масс при обтекании в тоннеле движущихся транспортных средств, а также при вентилировании путепроводов трубного типа с помощью воздуховодов.

1. Математическая модель конвекции.

В качестве базовой выбираем модель вязкой несжимаемой жидкости, позволяющую проводить расчеты течений в довольно широком диапазоне скоростей.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\Big) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\eta\nabla(\nabla\mathbf{v}) + \rho\mathbf{g}, \tag{2}$$

$$c\rho\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T\Big) = \lambda\nabla^2 T, \tag{3}$$

где t — время, ρ — плотность среды, $\mathbf{v} = \{u_1, u_2, u_3\}$ — вектор скорости (в системе координат (x_1, x_2, x_3)), p — давление, $\mathbf{g}$ — вектор плотности массовых сил (учитывает влияние силы тяжести), η — коэффициент динамической вязкости, T — температура, λ — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость.

Отметим особенности численного моделирования:

1) рассматриваем вынужденную конвекцию; влиянием силы тяжести пренебрегаем; 2) для основных расчетных скоростных режимов течение будет развитым турбулентным (среднее значение числа Рейнольдса значительно выше критического, определяющего переход от ламинарного режима течения жидкости к турбулентному [3]);

3) по возможности используем приближение Буссинеска (жидкость считаем динамически и статически несжимаемой, т.е. плотность не зависит от давления, но может зависеть от температуры; считаем отклонения всех термодинамических параметров от их значений, соответствующих условиям статического равновесия, малыми, что обеспечивает удовлетворительное приближение μ (или η), c_p, λ константами; повышением температуры вследствие диссипации пренебрегаем);

4) используем безразмерный вид уравнений;

5) уравнения (2)–(3) удовлетворяют обобщенному закону сохранения, который описывается дифференциальным уравнением для обобщенной переменной Φ (в роли Φ выступают проекции вектора скорости ui или температура T, «источниковый» член Ψ выбирается подходящим образом); идея состоит в том, чтобы разработать метод дискретизации и алгоритм решения для обобщенного уравнения (4), который будет общим для всех уравнений модели;

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)+\nabla(\rho\overline{u}\Phi)=\nabla(\Gamma\nabla\Phi)+\Psi; \tag{4}$$

6) отмечаем определенные сложности в постановке начальных и граничных условий с учетом необходимости проведения расчетов с подвижными границами.

2. Модели турбулентности

Для описания турбулентных течений используются различные модели турбулентности [5–8]. Большинство таких моделей основано на предложении Рейнольдса о представлении параметров среды (компонент вектора скорости, давления, температуры) в виде суммы значений, осредненных по времени, и пульсационных составляющих:

$$u_i=\overline{u}_i+u_i',\quad p=\overline{p}+p',\quad T=\overline{T}+T', \tag{5}$$

где u_i, p, T — компоненты скорости, давление и температура; $\overline{u}_i$, $\overline{p}$, $\overline{T}$ — их осредненные значения (черта означает осреднение по времени); u_i', p', T' — пульсации параметров в турбулентном потоке.

Уравнения неразрывности, движения, переноса энергии (с учетом равенств (5)) можно представить в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\overline{u}_i)}{\partial x_i}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho\overline{u}_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\overline{u}_j\overline{u}_i)}{\partial x_j}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_{\text{eff}}\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right)-\rho\overline{u_i'u_j'}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_{\text{eff}}\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial x_k}\right)+\rho g_i,$$

$$\frac{\partial(\rho\overline{T})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\overline{u}_i\overline{T})}{\partial x_i}=\frac{1}{c_p}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_i}-\rho c_p\overline{u_i'T'}\right)+\overline{\Psi}\right],$$

где $\overline{\Psi}$ — диссипативный член, $\overline{\Psi}=\Psi_{\text{ср}}+\Psi_{\text{турб}}$; $\Psi_{\text{ср}}$ — вязкая диссипация кинетической энергии «среднего» потока, переходящей в тепловую внутреннюю энергию; $\Psi_{\text{турб}}$ — диссипация кинетической энергии турбулентности; $\overline{u_i'u_j'}$ — напряжения Рейнольдса (корреляции второго порядка).

К этой системе добавляем уравнение для кинетической энергии турбулентности (турбулентных пульсаций):

$$k=\frac{1}{2}\overline{(u_i')^2}=\frac{3}{2}\overline{(u_i')^2}.$$

В уравнениях пренебрегаем пульсациями плотности. Считаем, что вязкая диссипация кинетической энергии среднего потока мала по сравнению с диссипацией энергии турбулентности.

$$\overline{\Psi}\approx\Psi_{\text{турб}}=\rho\varepsilon,$$

где ε — скорость диссипации энергии турбулентности.

Наиболее универсальной для описания турбулентных течений считается модель « $k-\varepsilon$ », которая включает уравнения переноса импульса, кинетической энергии турбулентных пульсаций и скорости диссипации кинетической энергии турбулентности [4]. В этой модели напряжения Рейнольдса представляются в виде зависимости от характеристик осредненного течения, турбулентной вязкости и энергии турбулентности:

$$-\rho\overline{u_i'u_j'}=\mu_t\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij},\quad -\rho c_P\overline{u_i'T'}-c_P\frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_i}, \tag{6}$$

где $\mathrm{Pr_t}$ — турбулентное число Прандтля; c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении; δ_{ij} — символ Кронекера. Турбулентная вязкость μ_t задается выражением

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{7}$$

где f_μ учитывает влияние стенки на величину μ_t.

В уравнении (7) скорость диссипации кинетической энергии турбулентных пульсаций $\varepsilon = v\overline{(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i})^2}$, где v — коэффициент кинематической вязкости (умножается на интенсивность вихря).

Турбулентное число Прандтля $\mathrm{Pr_t}$ (критерий подобия тепловых процессов в жидкостях и газах в гидродинамике) определяется следующим образом:

$$\mathrm{Pr_t} = \frac{\mathrm{c_P}\eta_\mathrm{t}}{\lambda_\mathrm{t}},$$

где λ_t — турбулентная теплопроводность; η_t — турбулентная вязкость; c_P — теплоемкость при постоянном давлении.

Уравнения переноса энергии турбулентности k и скорости диссипации ε — имеют вид:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u}_i k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right] + \mu_t\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} - \rho\varepsilon,$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u}_i \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right] + c_{\varepsilon 1} f_1 \mu_t\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} - c_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}.$$

Здесь f_1 — функция, учитывающая усиление ε вблизи стенки, f_2 — функция учета уменьшения скорости диссипации в зависимости от значения турбулентного числа Рейнольдса $\mathrm{Re_t}$ (служит критерием перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения).

Отметим особенности численного моделирования, связанные с использованием «$k - \varepsilon$» модели:

1) модели турбулентности для пристеночных пограничных слоев основаны (в основном) на вычислении турбулентной вязкости, вводимой по формуле Прандтля по аналогии с молекулярной вязкостью;

2) модели переноса турбулентной кинетической энергии — модели, связывающие величину напряжений Рейнольдса с локальным значением турбулентной кинетической энергии;

3) коэффициенты в уравнениях зависят от локальных характеристик течения.

Запишем систему уравнений, определяющих математическую модель турбулентного течения, в дивергентной форме [9].

Пусть $\overline{\mathbf{v}} = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ — осредненная по времени величина вектора скорости, $\mathbf{v}' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ — пульсационная составляющая вектора скорости. Тогда

$$\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'. \tag{8}$$

С учетом (8) модель «$k - \varepsilon$» описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\overline{\mathbf{v}}) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{\mathbf{v}}) + \nabla(\rho\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{v}}) = \rho\mathbf{g} + \nabla\mathbf{P}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \nabla(\rho k\overline{\mathbf{v}}) = \nabla(\Gamma_k \nabla k) + G - \rho\varepsilon, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \nabla(\rho \varepsilon\overline{\mathbf{v}}) = \nabla(\Gamma_\varepsilon \nabla \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{k}(C_1 G - C_2\rho\varepsilon), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{T}) + \nabla(\rho\overline{\mathbf{v}}\overline{T}) = \frac{1}{c_p}\nabla(\lambda_{\mathrm{eff}}\nabla\overline{T}) + \frac{1}{c_p}\overline{\Psi}, \tag{13}$$

где $\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$ — коэффициент диффузии k; $\Gamma_\varepsilon = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$ — коэффициент диффузии ε; $\mathbf{P}$ — тензор полных напряжений турбулентного потока; G — диссипативная функция турбулентного потока (скорость генерации энергии турбулентности); $\lambda_{\text{eff}} = \lambda + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} c_p$ — расчетный коэффициент теплопроводности; $C_1 = c_{\varepsilon 1} f_1$, $C_2 = c_{\varepsilon 2} f_2$, σ_k, σ_ε — численные значения параметров « $k-\varepsilon$ » модели, которые вычисляются эмпирически.

Тензор полных напряжений $\mathbf{P}$ турбулентного потока записывается в виде [10]:

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mu\nabla\overline{\mathbf{v}} + 2\mu_{\text{eff}}\mathbf{E}, \tag{14}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор, μ — коэффициент динамической вязкости, $\mathbf{E}$ — тензор скоростей деформаций, вычисленный через осредненные компоненты вектора скорости $\overline{\mathbf{v}}$.

Эффективный коэффициент турбулентной вязкости находится следующим образом:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t, \tag{15}$$

где коэффициент турбулентной вязкости μ_t определяется в соответствии с формулой Прандтля–Колмогорова:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}. \tag{16}$$

Здесь C_μ — определяемый экспериментальным путем параметр модели.

В уравнении (11) диссипативная функция турбулентного потока G записывается через сдвиговые компоненты тензора напряжений $\mathbf{P}$ и вектор осредненной скорости $\overline{\mathbf{v}}$:

$$G = \mathbf{P}(\nabla\overline{\mathbf{v}}). \tag{17}$$

Для замыкания системы уравнений (9)–(13) задаем уравнение состояния, которое связывает функции давления и плотности среды.

Заметим, что уравнения (10)–(13) во многом сходны и также подчиняются обобщенному закону сохранения (4). Это находит свое отражение в таблице. «Источниковый» член представлен в линеаризованном виде: $\Psi = \Psi_\mu + \Psi_\Phi$.

Таблица. Параметры системы (9)–(13).

Уравнение	$\mathbf{\Phi}$	$\mathbf{\Gamma}$	$\mathbf{\Psi}_\mu$	$\mathbf{\Psi_\Phi}$
Уравнение импульса вдоль оси x_i	$\overline{u}_i$	μ_{eff}	$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_{\text{eff}}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_{\text{eff}}\frac{\partial \overline{u}_j}{x_j})$	$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{p} + \frac{2}{3}\rho k) - \rho g$
Уравнение энергии	$\overline{T}$	$\frac{\lambda_{\text{eff}}}{c_p}$	0	$-\rho\varepsilon$
Уравнение переноса k	k	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	0	$G - \rho\varepsilon$
Уравнение переноса ε	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	0	$\frac{\varepsilon}{k}(C_1 P - C_2\rho\varepsilon)$

3. Общий вид дискретного аналога

Для решения будем использовать метод контрольного объема. Применение данного метода объясняется желанием получить решения, удовлетворяющие законам сохранения в расчетной области, а также сравнительно простой реализацией методики расчета и распространением ее на области сложной геометрической формы. С учетом того, что уравнения, описывающие движение жидкости, во многом сходны и могут быть описаны обобщенным дифференциальным уравнением, применим метод контрольного объема к уравнению (4).

Достаточно подробно суть метода и его приложения изложены в книге [11]. Поясним основные идеи метода. Расчетная область разбивается на некоторое множество непересекающихся контрольных объемов, в каждом из которых содержится только одна узловая точка. Дифференциальное уравнение интегрируется по контрольным объемам. При этом делается предположение о виде функции, описывающей изменение переменной между двумя соседними узлами. В результате получается дискретный аналог исходного дифференциального уравнения, связывающий значение переменной в узловой точке с ее значениями в соседних узлах. Метод контрольного объема гарантирует выполнение законов сохранения рассматриваемых величин как на всей расчетной области, так и на любой ее части. Таким образом, решение удовлетворяет точным интегральным балансам даже на относительно «грубой» сетке. Кроме того, методика расчета легко переносится на области сложной геометрической формы.

Особенности численного моделирования, связанные с используемыми методами дискретизации дифференциальных уравнений и расчетными сетками:

1) используется метод контрольного объема;

2) при проектировании путепроводов трубного типа для расчетных сеток более естественными являются цилиндрические координаты;

3) при программной реализации алгоритмов удобно использовать метод продольно-поперечной прогонки и метод Зейделя.

Методы дискретизации обобщенного уравнения (4) и общий вид дискретного аналога для случая цилиндрических координат (r, φ, z) приведены в работе [12]. Дискретные аналоги дифференциальных уравнений разрабатывались на основе метода контрольного объема. При этом применялись схемы, полученные на основе точных решений уравнений сохранения в цилиндрической системе координат. Стандартный вид дискретного аналога для обобщенной переменной Φ :

$$a_p\Phi_P = a_N\Phi_N + a_S\Phi_S + a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + a_U\Phi_U + a_D\Phi_D + b,$$

где $a_P = a_P^0 + a_N + a_S + a_W + a_E + a_U + a_D - \Psi_P\Delta V$, $a_P^0 = \frac{\rho_P^0\Delta V}{\Delta t}$,
$a_N = \frac{F_n}{e^{P_n}-1}\Delta\varphi\Delta z$, $a_S = \frac{e^{P_S}}{e^{P_S}-1}F_S\Delta\varphi\Delta z$, $a_W = \frac{F_W}{e^{P_W}-1}\Delta r\Delta z$, $a_E = \frac{e^{P_e}}{e^{P_e}-1}F_e\Delta r\Delta z$, $a_U = \frac{F_u}{e^{P_u}-1}\Delta\varphi\Delta z$, $a_D = \frac{e^{P_d}}{e^{P_d}-1}F_d\Delta\varphi\Delta r$, $b = a_P^0\Phi_P^0 + \Psi_C\Delta V$.

Значения чисел Пекле $P_n, P_S, P_W, P_e, P_u, P_d$, «расходы» $F_n, F_S, F_W, F_e, F_u, F_d$, и «проводимости» $D_n, D_S, D_W, D_e, D_u, D_d$, вычисляются по формулам, приведенным в ходе построения дискретного аналога. Коэффициенты уравнения рассчитываются по формулам, приведенным в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oleg Larin, Alexander Bokov, Nikolay Goryaev.* Mathematical Models of the Process of Air Removal from the Airtight Transport Pipeline During Vehicle Movement. — TransSiberia 2019: VIII International Scientific Siberian Transport Forum, p. 747–755.
2. *Larin O. N.*, *Bokov A. V.* Decreasing of profile air drag to the train movement inside the tube transport. — Transp. Syst. Technol., 2019, 5(2), p. 47–59.
3. *Ларин О. Н.*, *Боков А. В.* Перспективы развития высокоскоростных транспортных систем в эпоху цифровых технологий. — Материалы международной научно-практической конференции «Проблемы цифровой трансформации экономики, государства и общества» (Пятигорск 01 ноября 2019 г.). Сборник научных статей. Пятигорск: Издательство «РИА-КМВ», 2019, с. 11–25.
4. *Ларин О. Н.*, *Боков А. В.* Инновационные высокоскоростные транспортные системы. — Большая Евразия: развитие, безопасность, сотрудничество. Ежегодник: материалы XIX Национальной научной конференции с международным участием. Москва, 2020. Изд-во: Институт научной информации по общественным наукам РАН (Москва), 2020, с. 501–505.
5. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003, 840 с.
6. *Ландау Л. Д.*, *Лившиц Е. М.* Теоретическая физика: В 10 томах. Т.6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001, 736 с.
7. *Белов И. А.*, *Исаев С. А.* Моделирование турбулентных течений. СПб.: БГТУ «Военмех», 2001, 108 с.
8. *Юн А. А.* Теория и практика моделирования турбулентных течений. М.: ЛИБРОКОМ, 2009, 272 с.
9. *Боков А. В.* Математическое моделирование турбулентных течений в путепроводе трубного типа. — В сб.: Университетские чтения – 2020. Материалы научно-методических чтений ПГУ, 2020, с. 78–84.
10. *Ерофеев И. В.*, *Коржов Е. Н.*, *Шашкин А. И.*, *Иванов А. В.*, *Добросоцкая М. В.* Математическое моделирование турбулентного течения жидкости в кольцевом конфузоре под действием перепада давления. — Вестник Воронежского государственного ун-та. Серия: Физика. Математика, 2011, № 1, с. 138–147.
11. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984, 152 с.
12. *Боков А. В.* Дискретизация дифференциального уравнения конвекции и диффузии на основе метода контрольного объема./ А.В. Боков, А.А. Клячин, М.А. Корытова. — (140) Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика, 2016, № 4(35), с. 25–43.

UDC

Bokov A. B. (Pyatigorsk, Russian University of Economics, branch in Pyatigorsk)**. Features of numerical simulation of turbulent convection in a tunnel-type overpass.**

Abstract: The article presents a mathematical model of turbulent fluid flow, which is necessary for conducting numerical experiments in the design of pipe and tunnel type overpasses.

Keywords: high-speed transport systems, mathematical modeling, gas dynamics, air exhaust, pressure, velocity.