ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 28 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2021

А. О. Юлина (Санкт-Петербург, Военно-Космическая академия им. А. Ф. Можайского). **Решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки с помощью эллиптических функций Якоби.**

УДК 531.091

Резюме: Профессор Санкт-Петербургского университета Осип Иванович Сомов привлек для решения задачи о вращении твердого тела аппарат эллиптических функций Якоби. В 1850 г. Сомов получил решение этой задачи в случае первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром.

Ключевые слова: Задача о вращении, удар, эллиптические функции, Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, О. И. Сомов, К. Якоби.

Существенный шаг в развитии динамики твердого тела сделал Карл Якоби, введя эллиптические функции. С помощью этих функций время становится независимой переменной и основные параметры вращения твердого тела ψ, φ и θ являются однозначными функциями времени. Работа Карла Якоби по эллиптическим функциям была выполнена им в 1849 году, а опубликована уже посмертно в его втором томе сочинений Берлинской академией наук в 1882 году. Созданный Карлом Якоби математический аппарат эллиптических функций, позволил Осипу Ивановичу Сомову в 1850 г. блестяще решить задачу о вращении твердого тела в случае первоначального удара. В представленной работе мы проанализируем ход рассуждений О. И. Сомова [4].

В 1850 году О. И Сомов решил задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки в новой постановке, отличной от постановок Эйлера и Лагранжа: для того случая, когда движение происходит только от первоначального удара. Он показал, как эллиптические функции Якоби применяются в механике твердого тела. «Якоби дал новые формулы, отличающиеся своей изящностью и разрешающие вполне вопрос. Они были сперва напечатаны без доказательства, а потом в 39 томе журнала Креля, с доказательством и новым развитием (C. G. J. Jacobi, sur la rotation d,un corps).[3]»

Якоби основывает свои выводы на формулах, находящихся во втором томе Механики Пуассона.

В этом случае тело имеет три степени свободы и начинает вращаться от первоначального удара. Далее ударные нагрузки отсутствуют, действует только сила тяжести.

Таким образом, получаем систему алгебраических интегралов:

$$\begin{cases} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h. \end{cases} \tag{1}$$

Заключаем, что функции p, q, r меняются периодически:
q в пределах: $-q', 0, +q', \ldots$
p в пределах: $0, -p', +p', 0, \ldots$
r в пределах: $r', r^0, r', r^0, r', \ldots$
Далее на основании формул (1) определяются периоды соответствующих функций p, q, r.

$T = m\int_{-q'}^{+q'}\dfrac{dq}{pr}, \tau - t = m\int_{q}^{q'}\dfrac{dq}{pr}$.

Здесь $m = -\dfrac{B}{A-C}$; T — время, в продолжении которого величина q изменяется, переходя от $-q'$ к q'; t — время, соответствующее какому-нибудь значению q; а $\tau - t$ — время за которое q переходит от текущего значения к своему высшему пределу q'. Так как pr для одного и того же значения q, равны по величине, но противоположны по знаку (в зависимости от возрастания или убывания q), пределы интегрирования можно поменять. Переход от q к $-q'$ соответствует времени:

$$T - (\tau - t) = m\int_{q'}^{-q'}\frac{dq}{pr} - m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr}.$$

Это же время является временем перехода от $-q'$ к q. Увеличивая время t последовательно на $(\tau - t)$, получим, что полный период функции $q = 2T$. Тот же период соответствует функциям p и r, равно как и синусам и косинусам углов φ и θ, определенных уравнениями (3).

Рассмотрим теперь изменение угла $\psi = -l\int\dfrac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\cdot dt$

Подынтегральная функция, как следует из предыдущего разбора — периодическая функция с периодом $2T$, а значит и угол ψ — тоже периодическая функция с тем же периодом. Если мы будем знать различные положения тела в продолжении времени $2T$, тогда можно будет определить положение тела, которое оно имело или будет иметь в любой момент времени t. Так, зная положение тела во время t, мы определим его положение во время $t + 2iT$, где i целое число; для этого необходимо повернуть тело около OZ на угловую величину $2i\psi T$, для $i > 0$ в ту сторону, куда сообщен первоначальный удар. Найдем теперь выражения функций p и r. Выражения (1) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} p^2 = \dfrac{l^2 - Ch}{A(A-C)}[1 - \dfrac{B(B-C)}{l^2 - Ch}\cdot q^2], \\ r^2 = \dfrac{Ah - l^2}{C(A-C)}[1 - \dfrac{B(A-B)}{Ah - l^2}\cdot q^2]. \end{cases} \tag{2}$$

Так как величины (2) положительны, то

$\dfrac{B(B-C)}{l^2 - Ch}\cdot q^2, \ \dfrac{B(A-B)}{Ah - l^2}\cdot q^2$

также положительны и условия: $p^2 > 0$, $r^2 > 0$ требуют, чтобы они были меньше единицы. На основании этого можно записать:

$$\sqrt{\frac{B(B-C)}{l^2 - Ch}}\cdot q = \sin\xi, \sqrt{\frac{B(A-B)}{Ah - l^2}}\cdot q = k\sin\xi, \text{ где } k = \sqrt{\frac{(A-B)(l^2 - Ch)}{(B-C)(Ah - l^2)}};$$

$k' = \sqrt{1 - k^2}; \Delta\xi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}$.

Поэтому будем иметь

$p = -\sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{A(A-C)}}\cos\xi, q = \sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{B(B-C)}}\sin\xi, r = \pm\sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{B(B-C)}}\Delta\xi.$

Подставляя эти функции в одно из уравнений (1), получим:

$\dfrac{d\xi}{\Delta\xi} = \sqrt{\dfrac{(B-C)(Ah - l^2)}{ABC}}\cdot dt = ndt$, где $n = \sqrt{\dfrac{(B-C)(Ah - l^2)}{ABC}}$. Полагая $\dfrac{d\xi}{\Delta\xi} = du$ будем иметь: $\xi = am(u), u = n(t - t_0)$. Иногда функцию $F(u)$ заменяют другой функцией, в которой рассматривают $\sin\xi$ как независимую переменную:

$F(u) = \int_0^u \dfrac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}$, где $\sin\xi = u$, а для обозначения обратной функции

пользуются обозначением $\xi = am(u)$. [5]
Таким образом

$$\begin{cases} p = -\dfrac{l}{A}\sin\theta\sin\varphi = -\sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{A(A-C)}}\cos am(u), \\ q = -\dfrac{l}{B}\sin\theta\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{B(B-C)}}\sin am(u), \\ r = \dfrac{l}{C}\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{Ah - l^2}{C(A-C)}}\Delta am(u). \end{cases} \tag{3}$$

Найдем теперь выражение для угла ψ. Интегрируя первое соотношение уравнений (3), получим:
$\psi = -\dfrac{l}{A}\int_{t_0}^{t} dt - \dfrac{l(A-B)}{A}\int_{t_0}^{t}\dfrac{Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}dt.$
Подставив сюда полученные в (7) выражения p, q в функции u, $\frac{du}{n}$, получим:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{l}{An}\cdot u - \frac{l(A-B)(A-C)}{An}\int_0^u \frac{\sin^2 am(u)du}{A(B-C)\cos^2 am(u) + B(A-C)\sin^2 am(u)} \\ &= -\frac{l}{An}\cdot u - \frac{l(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)n}\int_0^u \frac{\sin^2 am(u)du}{1 + \dfrac{C(A-B)}{A(B-C)}\sin^2 am(u)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Последний интеграл есть эллиптическая функция третьего вида с положительным параметром $\dfrac{C(A-B)}{A(B-C)}$. Аргумент этой функции мнимый $a\sqrt{-1} = ai$. Поэтому параметр запишется: $\dfrac{C(A-B)}{A(B-C)} = -k^2\sin^2 am(ai)$. Учитывая введенные ранее обозначения, получим:

$$\begin{cases} \sin am(ai) = i\sqrt{\dfrac{C(Ah - l^2)}{A(l^2 - Ch)}}, \\ \cos am(ai) = l\sqrt{\dfrac{(A-C)}{A(l^2 - Ch)}}, \\ \Delta am(ai) = \sqrt{\dfrac{B(A-C)}{A(B-C)}}, \\ n = \sqrt{\dfrac{(B-C)(Ah - l^2)}{ABC}} = \pm\dfrac{l(A-C)}{iAC}\cdot\dfrac{tgam(ai)}{\Delta am(ai)}. \end{cases} \tag{5}$$

Используя соотношения (5), находим:
$\dfrac{l}{An} = \dfrac{\pm iC}{A-C}\cdot\dfrac{\Delta am(ai)}{tgam(ai)}$,
$\dfrac{l(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)n} = \pm ik^2\sin am(ai)\cos am(ai)\Delta am(ai).$
Следовательно, выражение (4) может быть записано:
$\psi = \pm\dfrac{iC\Delta am(ai)\cdot u}{(A-C)tgam(ai)} \pm i\int_0^u \dfrac{k^2\sin am(ai)\cos am(ai)\Delta am(ai)\sin^2 am(u)du}{1 - k^2\sin^2 am(ai)\sin^2(u)}.$
Подставляя сюда вместо эллиптической функции третьего рода ее алгебраическое выражения и заметив, что
$\dfrac{i\Delta am(ai)}{tgam(ai)} = \dfrac{i\cos am(ai)\Delta am(ai)}{\sin am(ai)} = \dfrac{dlog\sin am(ai)}{da} = \dfrac{dlogH(ai)}{da} - \dfrac{dlog\Theta(ai)}{da},$

окончательно получим выражение для угла ψ :

$$\begin{cases} \psi = -n'u \pm \dfrac{i}{2} \cdot log \dfrac{\Theta(u-ai)}{u+ai}, \\ n' = \pm \Big[\dfrac{C}{A-C} \cdot \dfrac{dlogH(ai)}{da} - \dfrac{A}{A-C} \cdot \dfrac{dlog\Theta(ai)}{da} \Big]. \end{cases} \tag{6}$$

Петербургский математик и механик, профессор О. И. Сомов, к 1851 г. дал первое обобщенное решение задачи вращения тела вокруг неподвижной точки. О. И. Сомов получил решение в виде (3) и (6) задачи о вращении твердого тела около точки после первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения (1) с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром. Таким образом, решение Сомова показало, что основные параметры движения выражаются через композицию эллиптических функций простейшего вида и, вводя их, задача о вращении твердого тела относительно неподвижной точки сводится к простейшим элементам. Далее, в 1871 году Карл Вейерштрасс упрощает систему эллиптических функций Якоби, вводя вместо трех тета-функций одну, имеющую своим аргументом комплексное время. Поэтому дальнейшее исследование задачи о движении волчка имело продолжение на комплексной плоскости, направляющие косинусы при вращении тела были получены в виде частных θ или σ-функций. Получают ясность и кватернионные выражения для кинематики движения в задаче о вращения твердого тела около неподвижной точки.

Таким образом, рассмотренное решение задачи, представленное О. И. Сомовым в 1850 году вполне объясняет дальнейшее направление исследований: и в кватернионном представлении и в решении С. В. Ковалевской.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. — Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1765, V. XIV, p. 154–193.
2. *Лагранж Ж. Л.* Аналитическая механика. Т. 1, 2. М.–Л., ГТТИ, 1950. // *Lagrange J. L.* Analytical mechanics. V. 1, 2. M.-L., GTTI, 1950.
3. *Сомов О. И.* Основания теории эллиптических функций. СПб: АН, 1850, 250 с. // *Somov O. I.* Foundations of the theory of elliptic functions. SPb: AN, 1850, 250 p.
4. *Кочина П. Я.* Вейрштрасс. 1815–1897. М.: Изд-во «Наука», 1985. // *Kochina P. Ya.* Weirstrass. 1815–1897. Moscow: Publishing house "Science 1985
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. III, часть 2. Санкт-Петербург: Гос. тех. издат., 1950. // *Smirnov V.I.* Higher mathematics course. V. III, part 2. St. Petersburg: Gos. tekh. izdat., 1950.

UDC 531.091

Yulina A. O (St. Petersburg, Military Space Academy. A. F. Mozhaisky). **Solution problem of a rigid body rotation about a fixed point with the help of Jacobi elliptic functions**

Abstract: The classical problem of a rigid body rotation dates back to L. Euler and J. L. Lagrange. Professor of St. Petersburg University Osip Ivanovich Somov used the apparatus of Jacobi elliptic functions to solve this problem. In 1850, Somov obtained a solution to this problem in the case of an initial impact by integrating the differential equations of motion with the help of Jacobi elliptic functions of the third kind with an imaginary parameter.

Keywords: Rotation problem, impact, elliptic functions, L. Euler, J. L. Lagrange, O. I. Somov, K. Jacobi