ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 28 **МАТЕМАТИКИ** **Выпуск 2**
2021

К. А. Уракова, А. В. Калинкин (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Марковский процесс гибели, однородный в квадранте плоскости.**

УДК 519.21

Резюме: Получено решение системы уравнений Колмогорова для двумерного марковского процесса гибели.

Ключевые слова: Марковский процесс на прямоугольнике, перманент.

Рассмотрен однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде $P_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = q\varphi_{\alpha_1\alpha_2}t + o(t)$, $P_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = r\varphi_{\alpha_1\alpha_2}t + o(t)$, $P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - \varphi_{\alpha_1\alpha_2}t + o(t)$, где $q > 0$, $r > 0$, $q + r = 1$; $\varphi_{\alpha_1 0} = 0$, $\varphi_{0\alpha_2} = 0$, в остальных случаях $\varphi_{\alpha_1\alpha_2} > 0$ и среди последних нет равных. Производящая функция переходных вероятностей $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$, $|s_1| \leqslant 1$, $|s_2| \leqslant 1$, удовлетворяет второму уравнению Колмогорова ([2]; схема $T_1 + T_2 \to T_1, T_2$, $q + r = 1$)

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial t} = (qs_1 + rs_2 - s_1 s_2) D(F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)), \tag{1}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$. Линейный оператор обобщенной производной $D\big(\sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} a_{\alpha_1\alpha_2} s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}\big) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} a_{\alpha_1\alpha_2} \varphi_{\alpha_1\alpha_2} s_1^{\alpha_1-1} s_2^{\alpha_2-1}$.

Теорема [3]. *Пусть* $\alpha_1 \geqslant \beta_1 \geqslant 1$, $\alpha_2 \geqslant \beta_2 \geqslant 1$. *Переходные вероятности*

$$P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \sum_{\gamma_1=\beta_1}^{\alpha_1} \sum_{\gamma_2=\beta_2}^{\alpha_2} C_{\gamma_1\gamma_2} x_{\beta_1\beta_2}^{(\gamma_1,\gamma_2)} e^{-\varphi_{\gamma_1\gamma_2} t}, \tag{2}$$

где $C_{\alpha_1\alpha_2}=1$, $C_{\alpha_1-1,\alpha_2}=\frac{r\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\varphi_{\alpha_1\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2}}$, $C_{\alpha_1,\alpha_2-1}=\frac{q\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\varphi_{\alpha_1\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1}}$, $C_{\alpha_1-1,\alpha_2-1}=$
$\operatorname{per}\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2} & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1} \\ \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2-1} & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1}-\varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2-1} \end{pmatrix} \frac{qr\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\prod\limits_{i,j=0,(i,j)\neq(1,1)}^{1} (\varphi_{\alpha_1-i,\alpha_2-j}-\varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2-1})}$,
$C_{\alpha_1-2,\alpha_2}=\operatorname{per}\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2} & 0 \\ \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1-2,\alpha_2} & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1}-\varphi_{\alpha_1-2,\alpha_2} \end{pmatrix} \frac{r^2\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\prod\limits_{i=0}^{1} (\varphi_{\alpha_1-i,\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1-2,\alpha_2})}$,
$C_{\alpha_1,\alpha_2-2}=\operatorname{per}\begin{pmatrix} 0 & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1} \\ \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1,\alpha_2-2} & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1}-\varphi_{\alpha_1,\alpha_2-2} \end{pmatrix} \frac{q^2\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\prod\limits_{i=0}^{1} (\varphi_{\alpha_1,\alpha_2-i}-\varphi_{\alpha_1,\alpha_2-2})}, \ldots$,
$x_{\alpha_1\alpha_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = 1$, $x_{\alpha_1-1,\alpha_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{r\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}$, $x_{\alpha_1,\alpha_2-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{q\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}$,
$x_{\alpha_1-1,\alpha_2-1}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \operatorname{per}\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2} & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1} \\ \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2} - \varphi_{\alpha_1\alpha_2} & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1} - \varphi_{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} \frac{qr\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\prod\limits_{i,j=0,(i,j)\neq(0,0)}^{1} (\varphi_{\alpha_1-i,\alpha_2-j}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2})}$,

$$x^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{\alpha_1-2,\alpha_2} = \operatorname{per}\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2} & 0 \\ \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2} & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} \frac{r^2\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\prod\limits_{i=1}^{2}(\varphi_{\alpha_1-i,\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2})},$$

$$x^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{\alpha_1,\alpha_2-2} = \operatorname{per}\begin{pmatrix} 0 & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1} \\ \varphi_{\alpha_1-1,\alpha_2}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2} & \varphi_{\alpha_1,\alpha_2-1}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} \frac{q^2\varphi_{\alpha_1\alpha_2}}{\prod\limits_{i=1}^{2}(\varphi_{\alpha_1,\alpha_2-i}-\varphi_{\alpha_1\alpha_2})}, \ \ldots,$$

и так далее.

Найдены последующие аналогичные выражения для $C_{\gamma_1\gamma_2}$, $x^{(\gamma_1,\gamma_2)}_{\beta_1\beta_2}$, содержащие перманенты матриц третьего и четвертого порядков [3].

Подходы работы [3] могут быть перенесены на случай наличия диагонального скачка марковского процесса (схема $T_1+T_2\to 0, T_1, T_2$, $p+q+r=1$). Также на марковский процесс гибели, неоднородный в квадранте плоскости. Представляет интерес нахождение переходных вероятностей процесса гибели пуассоновского типа [2], когда все $\varphi_{\alpha_1\alpha_2}$, $\alpha_1,\alpha_2=1,2,\ldots$, равны.

Представление (2) обобщает выражение для переходных вероятностей одномерного процесса гибели [1]. Переходные вероятности двумерного процесса гибели квадратичного типа $\varphi_{\alpha_1\alpha_2}=\lambda\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1,\alpha_2=0,1,\ldots$, $\lambda>0$, когда в уравнении (1) $D=\lambda\dfrac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_2}$, даны в [4] (схема $T_1+T_2\to 0, T_1, T_2$, $p+q+r=1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977, 568 с.
2. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи математических наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
3. *Уракова К. А.* Переходные вероятности двухмерного марковского процесса гибели и перманенты. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021, 72 с.
4. *Kalinkin A. V.*, *Mastikhin A. V.* On the separating variables method for Markov death-process equations. — Journal of Theoretical Probability, 2019, v. 31, is. 1, p. 163–182.

UDC 519.21

Urakova K. A., Kalinkin A. V. (Moscow, Bauman Moscow State Technical University). **Markov process of death, homogeneous in the quadrant of the plane.**

Abstract: The Kolmogorov equation for the two-dimensional Markov death process are solved.

Keywords: The Markov process on a rectangle, the permanent.