О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 28 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 2
2021

В. А. З о т о в (Москва, МАИ). **Инвариантные замены переменных.**

УДК 532.5

Резюме: Описан алгоритм поиска замен переменных в дифференциальных уравнениях. Найдены фронтовые решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, замена переменных.

Если дифференциальное уравнение с частными производными

$$Lu(x,t) = 0 \tag{1}$$

инвариантно относительно группы инфинитезимальных преобразований

$$\begin{aligned} x' &= x + a\xi(x,t,u) + o(a^2), \\ t' &= t + a\mu(x,t,u) + o(a^2), \\ u' &= u + a\omega(x,t,u) + o(a^2), \end{aligned} \tag{2}$$

то оно допускает инвариантные замены переменных

$$u(x,t = F(x,t,\eta,f(\eta)), \tag{3}$$

где

$$\eta = \eta(x,t) \tag{4}$$

— криволинейная координата, подлежащая определению из системы уравнений

$$\frac{dx}{\xi(x,t,u)} = \frac{dt}{\mu(x,t,u)} = \frac{du}{\omega(x,t,u)} \tag{5}$$

Инвариантные замены переменных (3) позволяют свести анализ уравнения с частными производными (1) к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции

$$f = f(\eta); \quad \eta = \mu(x,t). \tag{6}$$

Выделение класса фронтовых решений

$$u(x,t) = F(\eta); \quad \eta = \eta(x,t) \tag{7}$$

осуществляется путем учета дополнительного условия

$$\omega(x,t,u) = 0. \tag{8}$$

При этом можно определить закон движения ненулевой поверхности уровня

$$u(x,t) = u_0 = \text{const} \neq 0 \tag{9}$$

в виде

$$x = x(t;\eta_0), \tag{10}$$

что особенно важно при анализе тепловых и диффузионных задач.

Так для плоского линейного уравнения теплопроводности (диффузии)

$$u_t = u_{xx}, \tag{11}$$

инфинитезимальные координаты которого имеют вид

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 xt + \alpha_6 t; \\ \mu(t) &= \alpha_2 + 2\alpha_3 t + \alpha_5 t^2; \\ \omega(x,t,u) &= u\Big[\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_6 x - \frac{1}{4}\alpha_5(x^2+2t)\Big] \end{aligned} \tag{12}$$

допустимы шесть классов инвариантных замен переменных

$$u(x,t) = \Phi_i(x,t)F_i(\eta_i); \qquad \eta_i = \eta_i(x,t); \quad t = \overline{1,6}, \tag{13}$$

из которых можно выделить только два типа фронтовых решений:
— бегущую волну стационарной формы ($v = \mathrm{const}$)

$$\eta_1(x,t) = x - x - vt \tag{14}$$

— автомодельное решение

$$\eta_2(x,t) = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{15}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bluman G. W.*, *Cole J. D.* Similarity Methods for Differential Educations. New York: Springer-Verlag, 1974.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. Наука, 1978.

UDC 532.5

Zotov V. A. (Moscow, Moscow Aviation Institute (National Research University)).
Invariant variables substitution.

Abstract: The algorithm of the variables substitution for the differential equations is described. Front solutions are found.

Keywords: Keywords: differential equations, variables substitution.