ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 28 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2021

А. О. Ю л и н а (Санкт-Петербург, Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского). **Некоторые решения олимпиадных задач по теоретической механике с помощью принципа возможных скоростей.**

УДК 531.091

Резюме: Рассмотрены решения двух олимпиадных задач по аналитической статике. Эти задачи демонстрируют структуру и основной способ решения задач повышенной сложности первого раздела теоретической механике — статики.

Ключевые слова: теоретическая механика, статика, олимпиадные задачи.

Задачи аналитической статики можно разделить на две группы: первую и вторую. В первой равновесие рассматриваемых объектов известно, требуется найти силы, обеспечивающие это состояние. Во второй известны действующие нагрузки и определяются возможные положения равновесия механических объектов и систем.
Решение таких задач выполним с помощью принципа возможных скоростей (Принципа Лагранжа):
Для того чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы возможная мощность всех активных сил на любых возможных скоростях была равна нулю:

$$N = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \vec{V}_k = 0$$

Задача 1.

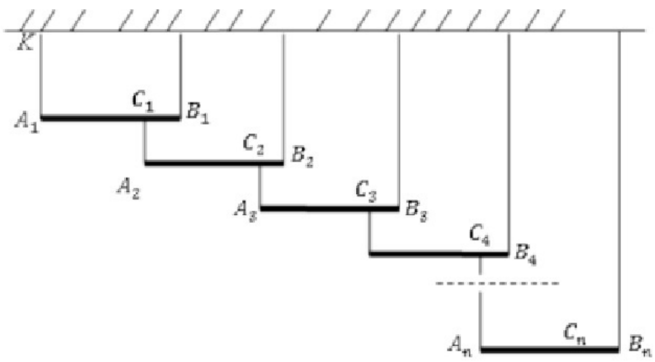

Рис. 1.

Система состоит из n горизонтальных стержней одинаковой длины l и весом P каждый, укрепленных при помощи невесомых тросов. При этом

$$\frac{\mathrm{C_1B_1}}{\mathrm{A_1B_1}} = \frac{\mathrm{C_2B_2}}{\mathrm{A_2B_2}} = \dots = \frac{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \frac{1}{4}.$$

Показать, что натяжение троса A_1K при $n \to \infty$ имеет пределом величину $\frac{2}{3}P$.(Рис. 1.)

Решение: Придаем механической системе одну степень свободы, убирая связь A_1K , заменяя ее реакцией — силой натяжения троса $T_{A_{1K}}$, включив последнюю в число активных сил. Используем принцип возможных скоростей:

$$N = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \vec{V}_k = 0.$$

Активные силы: $T_{A_{1K}}, P_1, \dots P_n$. По условию задачи $P_1 = P_2 = P_n = P$ Возможные скорости: $\omega_1, \dots \omega_n$. (Рис. 2.)

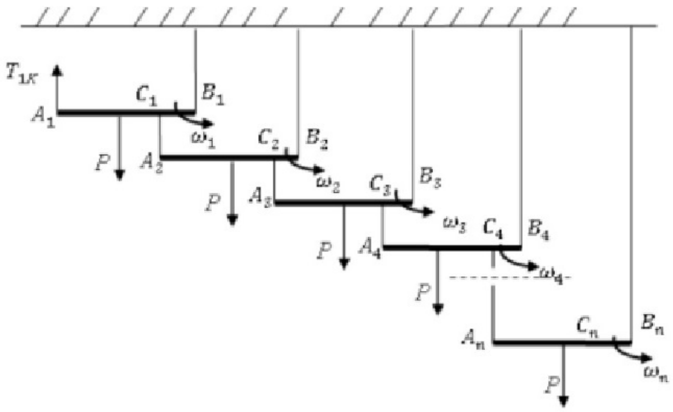

Рис. 2.

Мощности всех активных сил вычислим как произведение момента соответствующей силы на угловую скорость.

$$N = -T_{A_{1K}} l\omega_1 + P\frac{l}{2}\omega_1 + P\frac{l}{2}\omega_2 + P\frac{l}{2}\omega_3 + P\frac{l}{2}\omega_4 + \dots + P\frac{l}{2}\omega_n = 0$$

Запишем уравнения кинематических связей:

$$\omega_1 \frac{l}{4} = \omega_2 l, \quad \omega_2 \frac{l}{4} = \omega_3 l, \quad \omega_3 \frac{l}{4} = \omega_4 l, \dots, \omega_{n-1} \frac{l}{4} = \omega_n l$$

ω_1 и подставляя их в выражение для мощности получим уравнение:

$$T_{A_{1K}} l\omega_1 - P\frac{l}{2}\omega_1 - P\frac{l}{2}\omega_1\Big(\frac{1}{4}\Big)^2 - P\frac{l}{2}\omega_1\Big(\frac{1}{4}\Big)^3 - P\frac{l}{2}\omega_1\Big(\frac{1}{4}\Big)^4 - \dots - P\frac{l}{2}\omega_1\Big(\frac{1}{4}\Big)^n = 0$$

После сокращения на $l\omega_1$ и при $n \to \infty$ имеем:

$$T_{A_{1K}} = \frac{P}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^{n-1},$$

где $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^{n-1}$ — геометрический ряд, который сводится к сумме $S = \dfrac{1}{1-q}, q = \dfrac{1}{4}$.

Окончательно имеем:

$$T_{A_{1K}} = \frac{P}{2} \cdot \frac{4}{3} = P \cdot \frac{2}{3}.$$

Задача 2.

Стержень длиной l составлен из двух однородных кусков одинаковой длины, один из которых весит вдвое больше другого. Стержень подвешен за концы на нитях длиной l , прикрепленных к гвоздю в точке A. Какой угол с горизонталью образует стержень в положении равновесия?(Рис. 3.)

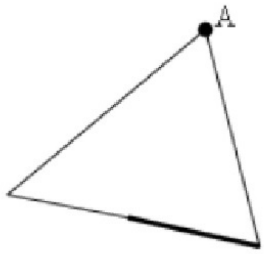

Рис. 3.

Решение:
Используем принцип возможных скоростей:

$$N = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \vec{V}_k = 0.$$

Активные силы: $\mathrm{G}_1 = mg, \mathrm{G}_2 = 2mg$.
Соответственно, координаты их точек приложения по оси y :
$\mathrm{y}_1 = l\cos(\alpha - 30^0) - \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right)\cdot \sin\alpha, \mathrm{y}_2 = l\cos(\alpha - 30^0) - \frac{l}{4}\cdot \sin\alpha$. (Рис. 4)

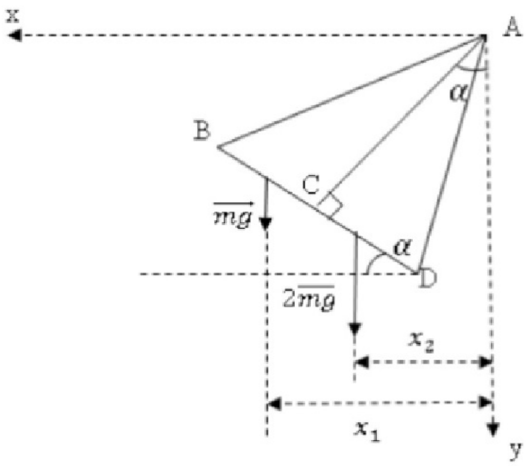

Рис. 4.

Ненулевые мощности, будут только у вертикальных составляющих векторов скоростей точек приложения сил тяжести обоих кусков стержня:
$\dot{y}_1 = -\dot{\alpha}\cdot l\left[\sin(\alpha - 30^0) + \frac{3}{4}\cos\alpha\right]$,
$\dot{y}_2 = -\dot{\alpha}\cdot l\left[\sin(\alpha - 30^0) + \frac{1}{4}\cos\alpha\right]$.

Таким образом, имеем:
$N = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \vec{V}_k = 0:\ mg\cdot\dot{y}_1 + 2mg\cdot\dot{y}_2 = 0 \Rightarrow \dot{y}_1 = -2\dot{y}_2$

Получаем уравнение:
$\frac{5}{4}\cos\alpha + 3\sin(\alpha - 30^0) = 0$, решая которое, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бражниченко Н. А.*, *Кан В. Л.*, *Минцберг Б. Л.* Сборник задач по теоретической механике. Учеб. пособие для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: «Высшая школа», 1974, 520 с. // *Brazhnichenko N. A.*, *Kan V. L.*, *Mintsberg B. L.* Collection of problems in theoretical mechanics. Textbook. manual for universities. Ed. 3rd, rev. and add. M.: "High school 1974, 520 p.
2. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов. изд. 2-е, перераб. и доп./ Под ред. К. С. Колесникова. М.: Наука. гл. ред. физ.-матем. лит., 1989, 448 с. // Collection of problems in theoretical mechanics: Textbook. manual for technical colleges. - ed. 2nd, rev. and additional./ Ed. K. S. Kolesnikov. M.: Science. ch. ed. physical-mat. lit., 1989, 448 p.
3. *Диевский В. А.* Теоретическая механика: Учебное пособие. СПб.: Изд-во «Лань», 2005, 320 с. // *Dievsky V. A.* Theoretical Mechanics: Textbook. SPb.: Publishing house "Lan", 2005, 320 p.

UDC 531.091

Yulina A. O (St. Petersburg, Military Space Academy. A. F. Mozhaisky). **Some solutions to Olympiad problems in theoretical mechanics using the principle of possible speeds.**

Abstract: The solutions of two Olympiad problems in analytical statics are considered. These problems demonstrate the structure and the main method for solving problems of increased complexity in the first section of theoretical mechanics — statics.

Keywords: theoretical mechanics, statics, olympiad problems.