ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 28 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2021

В. Л. Хацкевич (Воронеж, ВУНЦ ВВС ВВА им. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина). **Нечеткие средние систем нечетких чисел в задаче агрегирования нечеткой информации.**

УДК 519.766.2

Резюме: В данной работе изучены свойства нечетких усредняющих операторов, характеризующих агрегирование нечеткой информации.

Ключевые слова: усредняющие нечеткие операторы, агрегирование нечеткой информации.

В данной работе рассматривается задача агрегирования нечеткой информации посредством построения нечетких усредняющих операторов. При этом под результатом агрегирования понимается нечеткое число.

Как известно [1], интервал α-уровня нечеткого числа $\widetilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{z}}(x)$ определяется соотношением

$$Z_\alpha = \{x|\mu_{\widetilde{z}}(x) \geqslant \alpha\}, \ \ (\alpha \in (0,1]), \ \ Z_0 = Supp(\widetilde{z}).$$

Будем предполагать, что все α-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Совокупность таких нечетких чисел обозначим J. Левую границу α-интервала обозначим через $z^-(\alpha)$, а правую — $z^+(\alpha)$.

Будем писать $\widetilde{z} \prec \widetilde{w}$ для нечетких чисел $\widetilde{z}$ и $\widetilde{w}$, если одновременно

$$z^-(\alpha) \leqslant w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) \leqslant w^+(\alpha) \quad (\forall \alpha \in (0,1]). \tag{1}$$

Рассмотрим на множестве J нечетких чисел метрику, определяемую для $\widetilde{z}, \ \widetilde{w} \in J$ формулой

$$\rho(\widetilde{z},\widetilde{u}) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left(|z^-(\alpha) - u^-(\alpha)|, |z^+(\alpha) - u^+(\alpha)|\right),$$

где $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы α-уровней чисел $\widetilde{z}$ и $\widetilde{u}$.

Рассмотрим совокупность J^n векторов с нечеткими компонентами (нечетких векторов) вида $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n)$, где нечеткие числа $\widetilde{z}_i \in J$ $(i = 1,\ldots,n)$. Для двух нечетких векторов $\widetilde{Z}$ и $\widetilde{W}$ их сумму и умножение на числа будем понимать покоординатно. Неравенства нечетких векторов $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$ также будем понимать покоординатно в смысле определения (1).

На множестве нечетких векторов J^n для нечетких векторов $\widetilde{Z}$, $\widetilde{W}$ с компонентами $\widetilde{z}_i$ и $\widetilde{w}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ зададим метрику $\rho_n(\widetilde{Z},\widetilde{W}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\widetilde{z}_i \widetilde{w}_i)$.

Рассмотрим оператор $A : J^n \longrightarrow J$, для которого выполнены следующие свойства:

1) если $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}, \widetilde{z}, \ldots, \widetilde{z})$, то $A(\widetilde{Z}) = \widetilde{z}$ (идемпотентность);
2) если $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$, то $A(\widetilde{Z}) \prec A(\widetilde{W})$ (монотонность),
3) оператор $A : J^n \longrightarrow J$ непрерывен.

Это модификация на случай нечетких чисел характерных свойств скалярного оператора агрегатора (см., напр., [2]).

Оператор $A : J^n \longrightarrow J$, обладающий свойствами 1)–3) естественно назвать нечетким агрегатором.

Пусть заданы вещественные числа $\beta_i \in R\ (i = 1, \ldots, n)$ такие, что $\beta_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Рассмотрим усредняющий оператор A_β, определяемый для заданного $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n)$ $\widetilde{Z} \in J^n$ взвешенной суммой

$$A_\beta(\widetilde{Z}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \widetilde{z}_i. \tag{2}$$

Теорема 1. *Усредняющий оператор* A_β, *определяемый формулой* (2), *является нечетким агрегатором.*

Кроме того имеет место

Теорема 2. *Усредняющий оператор* $A_\beta : J^n \longrightarrow J$, *определяемый формулой* (2), *аддитивен и однороден.*

Пусть задан нечеткий вектор $\widetilde{Z} \in J^n$ с компонентами $(\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n)$. Фиксируем набор $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 ((z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha))^2 + (z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha))^2) d\alpha \to \min \quad (\forall \widetilde{w} \in J). \tag{3}$$

Теорема 3. *Решением задачи* (3) *для заданного нечеткого вектора* $\widetilde{Z}$, *причем единственным, является нечеткое число* $A_\beta(\widetilde{Z})$, *где* A_β *— усредняющий оператор* (2).

Определим теперь для фиксированного набора чисел $\beta_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$ таких, что $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ и заданной непрерывной строго монотонной функции $\phi : R \longrightarrow R$ нечеткий нелинейный усредняющий оператор $F_{\beta,\,\phi} : J^n \longrightarrow J$ равенством

$$F_{\beta,\,\phi}(\widetilde{Z}) = \phi^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi(\widetilde{z}_i)), \tag{4}$$

где $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n)$.

Справедлива

Теорема 4. *Для нелинейного усредняющего оператора* $F_{\beta,\,\phi}$, *определяемого формулой* (4), *выполнены условия* 1) – 3), *т. е. он является нечетким агрегатором.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piegat A.* Fuzzy Modeling and Control. Springer-Verlag, 2001, 728 p.
2. *Mesiar R.*, *Kolesarova A.* , *Calvo T.*, *Komornakova M.* A Review of Aggregation Functions. — Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, 2008, v. 220, p. 121–144.

UDC 519.766.2

Khatskevich V. L., (Voronezh, Air Force Academy named after N. E. Zhukovsky and Y. U. Gagarin). **Fuzzy averages of systems of fuzzy numbers in the problem of aggregation of fuzzy information.**

Abstract: In this paper, we study the properties of fuzzy averaging operators that characterize the aggregation of fuzzy information.

Keywords: averaging fuzzy operators, aggregation of fuzzy information.