ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 30 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2023

**Э. Г. Янукян** (Пятигорск, СКФУ). **Анализ волновых возмущений в ограниченном объеме химически реагирующей газовзвеси.**

УДК 53.044 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2023_30_1/00

*Резюме*: Рассмотрена задача о слабонелинейных волновых возмущениях в ограниченном объеме химически реагирующей двухфазной смеси монодисперсных твердых частиц в газообразном окислителе на основе модели взаимодействующих взаимопроникающих континуумов. Получены уравнения для определения значений установившихся амплитуд колебаний. Обсуждено влияние дисперсии, вызванной несовпадением температур и скоростей фаз газовзвеси, на нелинейное взаимодействие стоячих волн. Показано, что зависимость скорости звука от частоты приводит к ограничению перекачки энергии вверх по спектру и, тем самым, к увеличению амплитуд первых обертонов.

*Ключевые слова*: волновые возмущения, амплитуды колебания, двухфазная смесь монодисперсных твердых частиц, газообразный окислитель, модель взаимодействующих взаимопроникающих континуумов.

Рассмотрим задачу о слабонелинейных волновых возмущениях в ограниченном объеме химически реагирующей двухфазной смеси монодисперсных твердых частиц в газообразном окислителе на основе модели взаимодействующих взаимопроникающих континуумов. Для простоты будем считать, что частицы обладают одинаковыми теплофизическими свойствами. Предполагая, что на расстояниях порядка длины волны содержится достаточное количество частиц, будем описывать процессы колебания в системе методами механики сплошной среды. Пренебрегая диссипацией звуковых волн, обусловленной вязкостью и теплопроводностью в объеме газа, запишем систему уравнений движения двухфазной смеси в виде [1]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial(\varepsilon d_0)}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon d_0 u)}{\partial x}=-I; \quad \frac{\partial(\rho d_1)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho d_1 v)}{\partial x}=I;\\
\frac{\partial(\varepsilon n_0)}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon n_0 u)}{\partial x}=-I_0; \qquad \rho=1-, \quad d_0=n-0+n_1;\\
\varepsilon d_0\Big(\frac{}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\Big)u=-\frac{\partial\rho}{\partial x}-f+I(u-v);\\
\rho d_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\Big)v=f; \qquad p=R_0n_0T+R_1n_1T_0; \qquad (1)\\
\varepsilon d_0c_v\Big(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\Big)T_0+p\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon u+\rho v)\\
=Q_0-\alpha(T-0-T_e)-\frac{p}{d_0}I\Big(1-\frac{d_0}{d_1}\Big)+f(u-v)-I\frac{(v-u)^2}{2};\\
I=-(g-1)I_0; \quad \rho d_1c_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\Big)T_1=-Q_1; \quad Q_0-Q_1=LI_0.
\end{gathered}
$$

При анализе волновых движений двухфазной реагирующей смеси система уравнений (1) может быть замкнута следующими выражениями для потоков тепла $Q_0, Q_1$, потока окислителя $I_0$ и силы межфазного взаимодействия $f$ :

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{\rho d_1}{\tau_d}(u-v); \quad \tau_d = \frac{2a^2 d_1}{9v_0 d_0} \\
Q_0' &= \frac{3\rho\lambda_0}{a^2}(T_1' - T_0'); \quad \frac{dT_1'}{dt} = \frac{T_0' - (1-p_*)T_1'}{\tau_t} \\
I_0' &= \frac{3\rho\lambda_0 p_*}{a^2 L} T_1'; \quad p_* = \frac{E}{RT_{01}}(T_{01} - T_0); \quad \tau_t = \frac{a^2 d_1 c_1}{3\lambda_0},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где штрих отмечает величины, возмущенные волной. Выражения (2) получены для сильно разбавленной газовзвеси $(\rho \ll 1)$ для случая квазистационарного обтекания частиц [2].

Ограничимся квадратичным приближением, т. е. в уравнениях, описывающих движение двухфазной смеси (1), сохраним лишь линейные и квадратичные члены по возмущениям. Хотя выражения для силы межфазного взаимодействия и потоков тепла (2) получены в линейном приближении, их можно использовать при анализе нелинейных волновых процессов, исходя из следующих соображений. Будем рассматривать волны конечной амплитуды, профиль которых незначительно меняется на расстояниях порядка длины волны. Это изменение вызвано нелинейностью в уравнениях сохранения и состояния и неконсервативностью, обусловленной межфазовым взаимодействием. Если считать эти процессы одинаково влияющими на волну, то учет нелинейных членов в указанных выше выражениях означал бы превышение принятой точности.

Обозначая принятыми символами величины в покоящейся газовзвеси, а их возмущения в волне — этими же символами со штрихом, из (1) и (2) получаем с точностью до величин второго порядка малости по возмущениям следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial d_0'}{dt} + d_0\left[\frac{\partial u'}{\partial x} + \rho\frac{\partial}{\partial x}(v' - u')\right] + \frac{\partial(d_0' u')}{dx} = 0; \\
&(d_0 + d_0')\frac{\partial u'}{\partial t} + d_0 u' \frac{\partial u'}{\partial x} + (\rho d_1 + \rho' d_1)\frac{\partial v'}{\partial t} + \rho d_1 v' \frac{\partial v'}{\partial x} \\
&\qquad = -R\frac{\partial}{\partial x}(T_0 d_0' + d_0 T_0' + d_0 T_0'); \\
&(d_0 + d_0')\frac{\partial T_0'}{\partial t} + d_0 u' \frac{\partial T_0'}{\partial x} - (\gamma - 1)\left[(T_0 + T_0')\frac{\partial d_0'}{\partial t} + T_0 u' \frac{\partial d_0}{dx}\right] \\
&\qquad = \frac{3\rho\lambda_0}{a^2 c_v}(T_1' - T_0') + \frac{\rho d_1}{\tau_d c_v}(u - v)^2; \\
&\frac{\partial v'}{\partial t} + v'\frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{u' - v'}{\tau_d}; \\
&\frac{\partial T_1'}{\partial t} + v'\frac{\partial T_1'}{\partial x} = \frac{T_0' - (1 - p_*)T_1'}{\tau_t}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Линеаризованная система уравнений (1) и (2) допускает неустойчивые периодические решения, причем неустойчивость появляется при переходе от высоких к низким частотам. Учет же квадратичных членов в (3) приводит к перекачке энергии от низкочастотных колебаний вверх по спектру. Таким образом, совместное влияние нелинейности и неконсервативности может привести к существованию у системы (3) стационарного решения.

Проведенное исследование соответствует ситуации, когда динамическое и тепловое взаимодействие между фазами определяет не только диссипацию энергии звуковой волны, но и дисперсию фазовой скорости звука. С помощью метода медленно меняющихся амплитуд система уравнений сохранения массы, энергии и импульса для обеих фаз сведена к единственному нелинейному волновому уравнению. Получены уравнения для определения значений установившихся амплитуд колебаний. Обсуждено влияние дисперсии, вызванной несовпадением температур и скоростей фаз газовзвеси, на нелинейное взаимодействие стоячих волн. Показано, что зависимость скорости звука от частоты приводит к ограничению перекачки энергии вверх по спектру и, тем самым, к увеличению амплитуд первых обертонов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987, 464 с.
2. *Янукян Э. Г.* Акустические волны в химически реагирующей газовзвеси. Журнал «Научная мысль Кавказа». Ростов-на-Дону, 2004 № 13, с. 163–175.

UDC 53.044 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2023_30_1/00

***Yanukyan E. G.*** (Pyatigorsk, NCFU)**. Analysis of wave disturbances in a limited volume of chemically reacting gas suspension.**

*Abstract*: The problem of weakly nonlinear wave disturbances in a limited volume of a chemically reacting two-phase mixture of monodisperse solid particles in a gaseous oxidizer is considered on the basis of a model of interacting interpenetrating continuums. The equations for determining the values of the steady-state oscillation amplitudes are obtained. The influence of the dispersion caused by the mismatch of temperatures and velocities of the phases of the gas suspension on the nonlinear interaction of standing waves is discussed. It is shown that the dependence of the speed of sound on the frequency leads to a limitation of the energy transfer up the spectrum and, thereby, to an increase in the amplitudes of the first overtones.

*Keywords*: wave disturbances, oscillation amplitudes, two-phase mixture of monodisperse solid particles, gaseous oxidizer, model of interacting interpenetrating continuums.