

**Е. Н. А р у т ю н о в, А. А. К у д р я в ц е в, О. В. Ш е с т а к о в**  
(Москва, ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ). **Об оценивании скорости сходимости в обобщенной теореме Реньи при помощи дзета-метрики.**

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.52513/08698325\\_2023.30\\_1\\_1](https://doi.org/10.52513/08698325_2023.30_1_1)

*Резюме:* В докладе обсуждается обобщение теоремы Реньи на случай структурного распределения, имеющего параметр масштаба. В терминах дзета-метрики приводятся некоторые оценки скорости сходимости в обобщенной теореме Реньи в случае, когда структурное смешанное пуассоновское распределение индекса суммирования представляет собой масштабную смесь обобщенного гамма-распределения. В качестве частного случая приводятся оценки скорости сходимости для структурного дигамма-распределения.

*Ключевые слова:* обобщенная теорема Реньи, оценки скорости сходимости, обобщенное гамма-распределение, дигамма-распределение, дзета-метрика.

Большую роль в прикладной теории вероятностей и математической статистике играют гамма- и бета-классы распределений, зарекомендовавшие себя удобными и эффективными инструментами при моделировании многих реальных процессов. Обобщенное гамма-распределение и обобщенное бета-распределение второго рода представляют собой довольно широкие классы, включающие распределения, обладающие такими полезными свойствами, как, например, безграничная делимость и устойчивость, что позволяет использовать распределения из этих классов в качестве асимптотических аппроксимаций в различных предельных теоремах.

Одно из естественных обобщений распределений из гамма- и бета-классов представляет собой предложенное в [1] дигамма-распределение.

Изучение предельных теорем, связанных с обобщенным гамма-распределением и его частными случаями имеет богатую историю. Одна из первых и важнейших предельных теорем такого рода представляет собой утверждение о сходимости случайных сумм с геометрическим индексом суммирования к стандартному показательному распределению и носит название теоремы Реньи.

Одно из обобщений теоремы Реньи на случай структурного распределения, имеющего параметр масштаба, имеет следующий вид.

Пусть  $\Lambda$  — неотрицательная случайная величина с параметром масштаба  $\delta$ . Рассмотрим стандартный пуассоновский процесс  $N_1(t)$  и последовательность одинаково распределенных случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  с конечным математическим ожиданием  $EX_1 = a \neq 0$ . Предположим, что  $N_1(t), \Lambda, X_1, X_2, \dots$  независимы для любого  $t \geq 0$ .

**Теорема.** Пусть  $\hat{\Lambda} \stackrel{d}{=} \Lambda/\delta$ . Тогда

$$\frac{S_{N_1(\Lambda t)}}{a\delta t} \Longrightarrow \hat{\Lambda}, \quad \delta t \rightarrow \infty.$$

Основной сопутствующей задачей при исследовании асимптотического поведения стохастических объектов является оценивание скорости сходимости к предельному закону. В работах [2–4] оценивание скорости сходимости в теореме Реньи и некоторых

ее обобщениях осуществлялось при помощи предложенной в 1976 г. В. М. Золотаревым идеальной дзета-метрики [5].

Доклад посвящен расширению подходов, описанных в [2–4], и касается оценивания скорости сходимости в обобщенной теореме Реньи со структурными смешанными обобщенными гамма-распределениями, в частности приводится ряд результатов для структурного дигамма-распределения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 22-11-00212).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудрявцев А. А., Недоливко Ю. Н., Шестаков О. В.* Основные вероятностные характеристики дигамма-распределения и метод оценивания его параметров. — Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2022, № 2, с. 22–29.
2. *Korolev V. Yu., Zeifman A. I.* Generalized negative binomial distributions as mixed geometric laws and related limit theorems. — Lithuanian Mathematical Journal, 2019, v. 59, p. 366–388.
3. *Shevtsova I., Tselishchev M.* On the Accuracy of the Generalized Gamma Approximation to Generalized Negative Binomial Random Sums. — Mathematics, 2021, v. 9, art. id. 1571.
4. *Korolev V.* Bounds for the Rate of Convergence in the Generalized Rényi Theorem. — Mathematics, 2022, v. 10, art. id. 4252.
5. *Zolotarev V. M.* Approximation of distributions of sums of independent random variables with values in infinite-dimensional spaces. — Theory Probab. Appl., 1976, v. 21, p. 721–737.

UDC 519.2

DOI <https://doi.org/10.52513/08698325-2023.30.1.1>

*Arutyunov E. N., Kudryavtsev A. A., Shestakov O. V.* (Moscow, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences; Moscow, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University). **On estimating the convergence rate in the generalized Rényi’s theorem using zeta-metrics.**

*Abstract:* The report discusses a generalization of Rényi’s theorem to the case of a structural distribution with a scale parameter. In terms of zeta-metrics some estimates of the convergence rate in the generalized Rényi’s theorem are given in the case when the structural mixed Poisson distribution of the summation index is a scale mixture of the generalized gamma distribution. As a particular case, estimates of the convergence rate for the structural digamma distribution are given.

*Keywords:* generalized Rényi’s theorem, estimates of the convergence rate, generalized gamma distribution, digamma distribution, zeta-metric.