ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 30 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2023

В. М. Максимов, В. В. Ульянов, В. И. Хохлов (Москва, РГГУ; МГУ им. М. В. Ломоносова; СФР). **Два оператора Стейна–Чена для пуассоновских возмущений.**

УДК 519.2 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2023_30_2_1

Резюме: Приведены выражения характеризационных операторов Стейна–Чена для распределений сумм двух случайных величин, одна из которых имеет биномиальное или отрицательное биномиальное распределение, а другая — пуассоновское распределение.

Ключевые слова: биномиальное распределение, метод Стейна, отрицательное биномиальное распределение, производящий оператор, пуассоновское возмущение, распределение Паскаля, характеризация типа характеризаций Стейна–Чена, характеризационное тождество.

Пусть $\xi_1 \sim B(n,p)$, $\xi_2 \sim NB(r,\overline{p})$ и $\eta \sim \mathcal{P}(\lambda)$, где $B(n,p)$ — биномиальное распределение с параметрами n и p (число испытаний и вероятность «успеха» в схеме испытаний Бернулли, $NB(r,\overline{p})$ — отрицательное биномиальное распределение (или, иначе, распределение Паскаля) с параметрами r и $\overline{p}$ (число испытаний до наступления r-го «успеха» и вероятность «успеха» в схеме испытаний Бернулли, случаю $r=1$ соответствует геометрическое распределение) и $\mathcal{P}(\lambda)$ — распределение Пуассона с параметром λ. Полагаем $q=1-p$, $\overline{q}=1-\overline{p}$.

Утверждение 1. *Характеризационный оператор Стейна–Чена* [1] *для распределения суммы независимых случайных величин* ξ_1 *и* η *имеет следующий вид*:

$$\mathcal{A}_{B(n,p)*\mathcal{P}(\lambda)} = \mathcal{X} - \frac{npe^{\mathcal{D}}}{pe^{\mathcal{D}}+q\mathcal{I}} - \lambda e^{\mathcal{D}} \quad \Big(= \mathcal{X} - n\frac{p}{q}\,\frac{e^{\mathcal{D}}}{\mathcal{I}-\big(-\frac{p}{q}\big)e^{\mathcal{D}}} - \lambda e^{\mathcal{D}}\Big), \qquad (1)$$

где $\mathcal{X}$ *— оператор умножения на независимую переменную,* $\mathcal{D}$ *— оператор дифференцирования, а* $\mathcal{I}$ *— тождественный оператор.*

Доказательство утверждения 1 опирается на то обстоятельство, что производящая функция моментов суммы независимых случайных величин равна произведению их производящих функций моментов, в данном случае имеющих вид $\left(pe^t+q\right)^n$ и $e^{-\lambda}e^{\lambda e^{\lambda t}}$. Дифференцирование по переменной t произведения этих производящих функций моментов и деление результата на само произведение с последующей заменой переменной t на оператор $\mathcal{D}$ после вычитания полученного выражения из оператора $\mathcal{X}$ дает согласно следствию к утверждению 3.7 в [1, формула (17)] единственный (линейный) характеризационный оператор Стейна–Чена для распределения суммы независимых случайных величин с биномиальным и пуассоновским распределениями соответственно.

Замечание 1. Применяя к оператору (1) оператор $pe^{\mathcal{D}}+q\mathcal{I}$ справа (что не повлияет на свойство получающегося оператора оставаться оператором, аннулирующим оператор математического ожидания справа и, стало быть, служить характеризационным оператором Стейна–Чена для распределения рассматриваемой суммы), приходим к выражению (1) в виде

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{B(n,p)*\mathcal{P}(\lambda)} = \mathcal{X}\left(pe^{\mathcal{D}}+q\mathcal{I}\right) - npe^{\mathcal{D}} - \lambda e^{\mathcal{D}}\left(pe^{\mathcal{D}}+q\mathcal{I}\right). \qquad (2)$$

Таким образом, результат применения оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_{B(n,p)*\mathcal{P}(\lambda)}$ к произвольной функции $g:\mathbf{Z}_+\to\mathbf{R}$ имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{B(n,p)*\mathcal{P}(\lambda)}\,g(k)=\lambda p\,g(k+2)+\big((n-k)\,p+\lambda q\big)\,g(k+1)-q\,k\,g(k), \tag{3}$$

поскольку $e^{\mathcal{D}}=\Delta+\mathcal{I}$, где Δ — оператор взятия разности $(\Delta\,g(k)=g(k+1)-g(k))$.

Пользуясь выражением для суммы геометрической прогрессии, можно переписать оператор (1) в виде

$$\mathcal{A}_{B(n,p)*\mathcal{P}(\lambda)}=\mathcal{X}-n\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(-\frac{p}{q}\Big)^{\nu}e^{\nu\mathcal{D}}-\lambda\,e^{\mathcal{D}}, \tag{4}$$

и результат применения оператора (1) в этом виде к произвольной функции $g:\mathbf{Z}_+\to\mathbf{R}$ имеет при $p<q$ вид

$$\mathcal{A}_{B(n,p)*\mathcal{P}(\lambda)}\,g(k)=n\sum_{\nu=2}^{\infty}\Big(-\frac{p}{q}\Big)^{\nu}g(k+\nu)-\Big(\lambda+\frac{p}{q}\,n\Big)\,g(k+1)+k\,g(k). \tag{5}$$

З а м е ч а н и е 2. Сравнение выражений (3) и (5) с выражениями (14) и (15) в [2] показывает, что (линейный относительно $\mathcal{X}$) оператор (1) приводит (после несложных преобразований) к нужным результатам.

Утверждение 2. *Характеризационный оператор Стейна–Чена* [1] *для распределения суммы независимых случайных величин* ξ_2 *и* η *имеет следующий вид*:

$$\mathcal{A}_{NB(r,\overline{p})*\mathcal{P}(\lambda)}=\mathcal{X}-r\,\overline{q}\,\frac{e^{\mathcal{D}}}{\mathcal{I}-\overline{q}\,e^{\mathcal{D}}}-\lambda\,e^{\mathcal{D}}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству утверждения 1 и состоит в применении утверждения 3.7 из [1, формула (17)] с учетом того, что производящая функция моментов отрицательного биномиального распределения с параметрами r и $\overline{p}$ имеет вид $\big(\overline{p}/(1-\overline{q}\,e^{t})\big)^{r}$.

З а м е ч а н и е 3. Следуя тому же порядку выкладок, который был приведен в замечании 1, получаем следующие аналоги выражений (2)–(5):

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{NB(r,\overline{p})*\mathcal{P}(\lambda)} = \mathcal{X}\,\big(\mathcal{I}-\overline{q}\,e^{\mathcal{D}}\big)-r\,\overline{q}\,e^{\mathcal{D}}-\lambda\,e^{\mathcal{D}}\big(\mathcal{I}-\overline{q}\,e^{\mathcal{D}}\big), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}}_{NB(r,\overline{p})*\mathcal{P}(\lambda)}\,g(k) &= \lambda\overline{q}\,g(k+2)-\big((r+k)\,\overline{q}+\lambda\big)\,g(k+1)+k\,g(k),\\ \mathcal{A}_{NB(r,\overline{p})*\mathcal{P}(\lambda)} &= \mathcal{X}-r\sum_{\nu=1}^{\infty}\big(\overline{q}\,e^{\mathcal{D}}\big)^{\nu}-\lambda\,e^{\mathcal{D}},\\ \mathcal{A}_{NB(r,\overline{p})*\mathcal{P}(\lambda)}\,g(k) &= r\sum_{\nu=2}^{\infty}\overline{q}^{\,\nu}\,g(k+\nu)+\big(r\,\overline{q}+\lambda\big)\,g(k+1)-k\,g(k).\end{aligned} \tag{8}$$

Приведенные в данном докладе примеры призваны подчеркнуть удобство получения и использования характеризационных операторов типа (2), (4), (6), (7) и (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хохлов В. И.* «Септаккорд» методов поиска вероятностных характеризационных моментных тождеств и пятый элемент (к пятидесятилетию метода Стейна). — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2022, т. 29, в. 1, с. 7–24. // *Khokhlov V. I.* “Seventh chord” of methods for searching characterizing moment identities and the fifth element. (Dedicated to 50th anniversary of Stein’s method.) — OP&PM Surveys Appl. Industr. Math., 2022, v. 29, is. 1, p. 7–24. (In Russian.)
2. *Upadhye N. S.*, *Čekanavičius V.*, *Vellaisamy P.* On Stein operators for discrete approximations. — Bernoulli, 2017, v. 23, № 4A, p. 2828–2859.

Поступила в редакцию
22.XII.2023

UDC 519.2 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2023_30_2_1

Maksimov V. M., ***Ulyanov V. V.***, ***Khokhlov V. I.*** (Moscow, Russian State University for the Humanities; Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University; Social Fund of Russia). **Two Stein–Chen operators for Poisson perturbation.**

Abstract: Explicit expressions of characterizing Stein–Chen operators for binomial and negative binomial distributions perturbed by Poisson distribution are presented.

Keywords: binomial distribution, moment generating function, negative binomial distribution, Pascal distribution, Poisson perturbation, Stein-–Chen-like characterization, Stein method, characterizing identity.