ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 27 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2020

А. В. Калинкин, **М. А. Степанова** (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Спектральное представление переходных вероятностей для критического марковского ветвящегося процесса $\mathbf{T_1 + T_2 \to 2T_1, 2T_2}$.**

УДК 519.21

Резюме: Решены уравнения Колмогорова для процесса рождения и гибели.

Ключевые слова: Четверть плоскости, марковский процесс на отрезке.

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде $P_{(\alpha_1+1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = p\alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t)$, $P_{(\alpha_1-1,\alpha_2+1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = q\alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t)$, $P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - \alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t)$ ($p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = 1$; $\lambda > 0$). Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}/(\alpha_1!\alpha_2!) F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$, $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$, $|s_1| \leqslant 1$, $|s_2| \leqslant 1$, удовлетворяет первому и второму уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z_1 z_2 \Big(p \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1^2} + q \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big), \ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (p s_1^2 + q s_2^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2}, \qquad (1)$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$. Далее $p = q = 1/2$.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (1) ищем в виде ряда с разделенными переменными

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} A_{\alpha_1\alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) e^{-\lambda_{\alpha_1\alpha_2} t}. \qquad (2)$$

Подставляя ряд (2) в уравнения (1), получаем уравнения второго порядка

$$\lambda z_1 z_2 \Big(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big) + \lambda_{\alpha_1\alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} = 0;$$

$$\lambda \Big(\frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} s_2^2 - s_1 s_2 \Big) \frac{\partial^2 C_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_1\alpha_2} = 0; \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots$$

Так как процесс $\xi(t)$ на множестве $L = \{(0, \alpha_1 + \alpha_2), (1, \alpha_1 + \alpha_2 - 1), \ldots, (\alpha_1 + \alpha_2, 0)\}$, то имеет место краевое условие «решение есть многочлен», что возможно для последовательности «собственных значений» $\lambda_{\alpha_1\alpha_2} = \lambda\alpha_1(\alpha_1 + 1)/2$. «Собственные функции»

$$\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) = z_1^{\alpha_1} z_2 (z_1 + z_2)^{\alpha_2} \, {}_2F_1(-\alpha_1, 1 - \alpha_1; 2; -z_2/z_1);$$

$$C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) = s_2^{\alpha_2} (s_1 - s_2)^{\alpha_1 + 1} \, {}_2F_1(-\alpha_2, \alpha_1 + 1; -\alpha_1 - \alpha_2; s_1/s_2),$$

где ${}_2F_1(a,b;c;x)$ — гипергеометрическая функция. Получаем

$$\mathcal{F}(t;z_1,z_2;s_1,s_2)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty}A_{\alpha_1\alpha_2}z_1^{\alpha_1}z_2(z_1+z_2)^{\alpha_2}\,{}_2F_1(-\alpha_1,1-\alpha_1;2;-z_2/z_1)\times$$
$$s_2^{\alpha_2}(s_1-s_2)^{\alpha_1+1}{}_2F_1(-\alpha_2,\alpha_1+1;-\alpha_1-\alpha_2;s_1/s_2)e^{-\alpha_1(\alpha_1+1)\lambda t/2}.$$

При начальном условии $t=0$ имеем

$$e^{z_1s_1+z_2s_2}=\sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty}A_{\alpha_1\alpha_2}z_1^{\alpha_1}z_2(z_1+z_2)^{\alpha_2}\,{}_2F_1(-\alpha_1,1-\alpha_1;2;-z_2/z_1)\times$$
$$s_2^{\alpha_2}(s_1-s_2)^{\alpha_1+1}{}_2F_1(-\alpha_2,\alpha_1+1;-\alpha_1-\alpha_2;s_1/s_2).$$

Для определения коэффициентов $A_{\alpha_1\alpha_2}$ сравниваем это выражение с разложением экспоненты, устанавливаемое с помощью формул суммирования 6.8.1.12 ($p=1,\ \ r=0,$ $q=1,\ \ s=0$), 6.8.4.1 ($p=0,\ \ r=1,\ \ q=1,\ \ s=0$; $a=2,\ \ b=1,\ \ c=1$; $\beta=1$) [4] для гипергеометрических многочленов,

$$e^{z_1s_1+z_2s_2}=\frac{z_1e^{(z_1+z_2)s_1}+z_2e^{(z_1+z_2)s_2}}{z_1+z_2}-$$
$$\sum_{\alpha_1=1}^{\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\frac{(2\alpha_1+1)(\alpha_1+\alpha_2)!}{(2\alpha_1+\alpha_2+1)!\alpha_2!}z_1^{\alpha_1}z_2(z_1+z_2)^{\alpha_2}\,{}_2F_1(-\alpha_1,1-\alpha_1;2;-z_2/z_1)\times$$
$$s_2^{\alpha_2}(s_1-s_2)^{\alpha_1+1}{}_2F_1(-\alpha_2,\alpha_1+1;-\alpha_1-\alpha_2;s_1/s_2).$$

Теорема. *Производящая функция переходных вероятностей равна*

$$\mathcal{F}(t;z_1,z_2;s_1,s_2)=\frac{z_1e^{(z_1+z_2)s_1}+z_2e^{(z_1+z_2)s_2}}{z_1+z_2}-$$
$$\sum_{\alpha_1=1}^{\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\frac{(2\alpha_1+1)(\alpha_1+\alpha_2)!}{(2\alpha_1+\alpha_2+1)!\alpha_2!}z_1^{\alpha_1}z_2(z_1+z_2)^{\alpha_2}\,{}_2F_1(-\alpha_1,1-\alpha_1;2;-z_2/z_1)\times \tag{3}$$
$$s_2^{\alpha_2}(s_1-s_2)^{\alpha_1+1}{}_2F_1(-\alpha_2,\alpha_1+1;-\alpha_1-\alpha_2;s_1/s_2)e^{-\alpha_1(\alpha_1+1)\lambda t/2}.$$

Ряд (3) получен с целью его суммирования и вывода обобщенного свойства ветвления для переходных вероятностей [1]. Изложенный метод подлежит переносу на не критический случай $T_1+T_2\to 2T_1,2T_2,\ \ p\neq q$ [3] и другой процесс рождения и гибели квадратичного типа на множестве L, $T_1+T_2\to 2T_2$; $T_1\to T_2$ (эпидемия SIS).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
2. *Калинкин А. В.*, *Степанова М. А.* Спектральное представление переходных вероятностей для марковского ветвящегося процесса $T_1\to T_2$; $T_2\to T_1$. — Обозрение прикл. промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 61–63.
3. *Калинкин А. В.* Вероятность остановки на границе случайного блуждания в четверти плоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 452–474.
4. *Прудников А. П.*, *Брычков Ю. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986, 800 с.

УДК 519.21

Kalinkin A. V., Stepanova M. A. (Moscow, Bauman Moscow State Technical University). **Spectral representation of transition probabilities for a critical Markov branching process $\mathbf{T_1+T_2\to 2T_1,2T_2}$.**

Abstract: Kolmogorov equations for quadratic birth and death process are solved.

Keywords: A quarter of the plane, the Markov process on the segment.