ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 27 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2020

А. В. Калинкин (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Переходные вероятности марковского процесса рождения квадратичного типа $\mathbf{T_1 + T_2 \to 2T_1 + 2T_2}$.**

УДК 519.21

Резюме: Решены уравнения Колмогорова для марковского процесса рождения.

Ключевые слова: Четверть плоскости, марковский процесс на прямой.

В работе рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$, переходные вероятности $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1+1,\alpha_2+1)}(t) = \alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t)$, $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - \alpha_1\alpha_2\lambda t + o(t)$, $\lambda > 0$. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}/(\alpha_1!\alpha_2!) F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$, $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$, $|s_1| \leqslant 1$, $|s_2| \leqslant 1$, удовлетворяет первому и второму уравнениям Колмогорова [2]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^4 \mathcal{F}}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (s_1^2 s_2^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2}, \tag{1}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (1) ищем в виде ряда с разделенными переменными

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} A_{\alpha_1\alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) e^{-\lambda_{\alpha_1\alpha_2} t}. \tag{2}$$

Подставляя ряд (2) в уравнения (1), получаем уравнения

$$\lambda z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^4 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big) + \lambda_{\alpha_1\alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} = 0;$$
$$\lambda (s_1^2 s_2^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 C_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_1\alpha_2} = 0; \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots$$

Так как процесс $\xi(t)$ на множестве $L = \{(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1), (\alpha_1 + 2, \alpha_2 + 2), \ldots\}$, то для первого уравнения имеет место краевое условие «решение есть многочлен», что возможно для последовательности «собственных значений» $\lambda_{\alpha_1\alpha_2} = \lambda\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots$ «Собственные функции» есть, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\widetilde{C}_{\alpha_1,\alpha_1+k}(z_1, z_2) = z_1 z_2^{k+1} {}_2F_3(-\alpha_1 + 1, \alpha_1 + k + 1; 2, k + 1, k + 2; z_1 z_2),$$
$$\widetilde{C}_{\alpha_2+k,\alpha_2}(z_1, z_2) = z_1^{k+1} z_2 {}_2F_3(-\alpha_2 + 1, \alpha_2 + k + 1; 2, k + 1, k + 2; z_1 z_2);$$
$$C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} {}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1 + \alpha_2 + 1; s_1 s_2);\ \alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, \ldots,$$

где ${}_2F_3(-n, n+k+2; c_1, c_2, c_3; x)$ — обобщенный гипергеометрический многочлен и ${}_2F_1(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция. При начальном условии $t = 0$ имеем

$$e^{z_1 s_1 + z_2 s_2} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 0}^{\infty} A_{\alpha_1 \alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1 \alpha_2}(z_1, z_2) C_{\alpha_1 \alpha_2}(s_1, s_2),$$

и сравнивая этот ряд с разложением экспоненты, устанавливаемым с помощью формулы суммирования 6.8.4.1 ($p=0$, $r=2$, $q=3$, $s=0$; $c_1=k+1$, $c_2=1$; $b_1=2$, $b_2=k+1$, $b_3=k+2$; $\beta=k+2$) [3] для гипергеометрических многочленов,

$$e^{z_1 s_1 + z_2 s_2} = {}_0F_1(1; z_1 z_2 s_1 s_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{z_1^k s_1^k}{k!} + \frac{z_2^k s_2^k}{k!} \Big) {}_0F_1(k+1; z_1 z_2 s_1 s_2) = -1 +$$
$$+ e^{z_1 s_1} + e^{z_2 s_2} + \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha_1 - 1}(\alpha_1 - 1)! \alpha_1!}{(2\alpha_1 - 1)!} z_1 z_2\, {}_2F_3(-\alpha_1 + 1, \alpha_1 + 1; 2, 1, 2; z_1 z_2) \times$$
$$s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_1}\, {}_2F_1(\alpha_1, \alpha_1; 2\alpha_1 + 1; s_1 s_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha_2=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha_2 - 1}(\alpha_2 + k - 1)!(\alpha_2 + k)!}{k!(k+1)!(2\alpha_2 + k - 1)!} z_1^{k+1} z_2 \times$$
$${}_2F_3(-\alpha_2 + 1, \alpha_2 + k + 1; 2, k+1, k+2; z_1 z_2) s_1^{\alpha_2 + k} s_2^{\alpha_2} \times$$
$${}_2F_1(\alpha_2 + k, \alpha_2; 2\alpha_2 + k + 1; s_1 s_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha_1 - 1}(\alpha_1 + k - 1)!(\alpha_1 + k)!}{k!(k+1)!(2\alpha_1 + k - 1)!} z_1 z_2^{k+1} \times$$
$${}_2F_3(-\alpha_1 + 1, \alpha_1 + k + 1; 2, k+1, k+2; z_1 z_2) \times$$
$$s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_1 + k}\, {}_2F_1(\alpha_1, \alpha_1 + k; 2\alpha_1 + k + 1; s_1 s_2),$$

определяем значения коэффициентов $A_{\alpha_1 \alpha_2}$.

Теорема. *Производящая функция переходных вероятностей равна*

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = -1 + e^{z_1 s_1} + e^{z_2 s_2} + \sum_{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha_\sigma - 1}(\alpha_\sigma + k - 1)!(\alpha_\sigma + k)!}{k!(k+1)!(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)!} \times$$
$$z_1 z_2 z_\sigma^k\, {}_2F_3(-\alpha_\sigma + 1, \alpha_\sigma + k + 1; 2, k+1, k+2; z_1 z_2) \times$$
$$s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}\, {}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1 + \alpha_2 + 1; s_1 s_2) e^{-\alpha_1 \alpha_2 \lambda t}.$$

Здесь $\alpha_\sigma = \alpha_1$, $z_\sigma = z_2$, *если* $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$; $\alpha_\sigma = \alpha_2$, $z_\sigma = z_1$, *если* $\alpha_1 > \alpha_2$; $k = |\alpha_1 - \alpha_2|$.

Ряд получен с целью его суммирования и вывода обобщенного свойства ветвления для переходных вероятностей [1]. Данный метод переносится на случай двухмерного процесса рождения квадратичного типа $T_1 + T_2 \to 2T_1 + T_2, T_1 + 2T_2, 2T_1 + 2T_2$ [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
2. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук. 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
3. *Прудников А. П.*, *Брычков Ю. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986, 800 с.

УДК 519.21

Kalinkin A. V. (Moscow, Bauman Moscow State Technical University). **Transitional probabilities of the Markov process of birth of a quadratic type $\mathbf{T_1 + T_2 \to 2T_1 + 2T_2}$.**

Abstract: The Kolmogorov equations for the Markov birth process are solved.

Keywords: The quarter-plane, the Markov process on a line.