ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 27 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2020

А. О. Юлина, **Д. В. Бородин** (Санкт-Петербург, Военно-Космическая академия им. А. Ф. Можайского). **Динамические уравнения Эйлера. История аналитического решения. Техническое применение.**

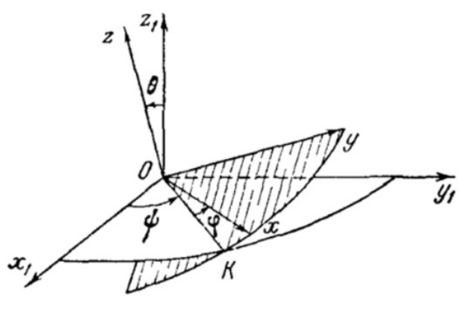
УДК 531.091

Резюме: В работе исследуется решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, представленное Леонардом Эйлером. Эйлер классифицировал основные задачи механики и разделил задачи динамики на две группы: первая (или прямая задача динамики): заданы кинематические характеристики движения, найти силовые характеристики; вторая (или обратная задача динамики): заданы силы, найти кинематику движения.

Подробно рассмотрено получение таких впоследствии известных кинематических и динамических уравнений, как Эйлеровы уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Показано,что аналитическое решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки стало основополагающим в теории гироскопа и получило широкое техническое применение в задачах стабилизации и навигации.

Ключевые слова: Эйлер, Лагранж, Ковалевская, твердое тело, вращение, аналитическое решение, гироскоп.

Впервые задачу о вращении твердого тела, причем сразу в общем виде, поставил Л. Эйлер в 1758 г. В работе «Теория движения твердых тел» [1] он рассмотрел случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки (полюса, точки O). В этом случае тело имеет три степени свободы. Такие три параметра Леонард Эйлер называет углами: прецессии — ψ, собственного вращения — φ, нутации — θ, которые однозначно определяют положение подвижной системы отсчета, жестко связанной с телом, $Oxyz$ относительно неподвижной системы координат — $Ox_1y_1z_1$. При вращении твердого тела углы Эйлера меняются, являясь некоторыми функциями времени: $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — уравнения движения.



Были получены кинематические уравнения (связи угловых скоростей тела и параметров движения):

$$\begin{cases}\omega_x = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi\\ \omega_y = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi\\ \omega_z = \dot\psi\cos\theta \ + \dot\varphi\end{cases} \qquad (1)$$

Составляющие скорости произвольной точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = u = qz - ry,\\ \dfrac{dy}{dt} = v = rx - pz,\\ \dfrac{dz}{dt} = \omega = py - qx,\end{cases}$$

где x, y, z — координаты точки; t — время; p, q, r — угловые скорости тела относительно осей координат [2].

Далее Л. Эйлер устанавливает зависимости между параметрами движения и силами, действующими на тело — динамические уравнения. Исходя из соотношений (1), Эйлер ставит следующую проблему: дана угловая скорость ω вращения твердого тела вокруг оси, проходящей через его центр инерции I и образующей углы α, β, γ с центральными главными осями инерции, которые приняты за оси координат. Какими должны быть компоненты X, Y, Z сил, приложенных к элементу тела массы dm, которое занимает положение, определенное точкой (x, y, z), чтобы за время dt ось и угловая скорость вращения получили заданные изменения $d\alpha, d\beta, d\omega$. В связи с тем, что в соответствии с основными принципами механики (вторым законом Ньютона) компоненты искомой силы после умножения на dt и деления на dm пропорциональны (а при соответствующем подборе единиц измерения — равны) приращениям компонентов скоростей ($\frac{X dt}{dm} = du, \frac{Y dt}{dm} = dv, \frac{Z dt}{dm} = dw$), остается вычислить последние. Переписав формулы (1) в виде
$u = \omega(z\cos\beta - y\cos\gamma), v = \omega(x\cos\gamma - z\cos\alpha), w = \omega(y\cos\alpha - x\cos\beta)$
и приняв во внимание, что
$dx = udt = \omega dt(z\cos\beta - y\cos\gamma), dy = vdt = \omega dt(x\cos\gamma - z\cos\alpha),$
$dz = \omega dt(y\cos\alpha - x\cos\beta)$
находим
$du = d\omega(z\cos\beta - y\cos\gamma) - \omega(z\sin\beta d\beta - y\sin\gamma d\gamma) + \omega^2 dt(y\cos\alpha\cos\beta + z\cos\alpha\cos\gamma - x\sin^2\alpha);$
$dv = d\omega(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - \omega(x\sin\gamma d\gamma - z\sin\alpha d\alpha) + \omega^2 dt(z\cos\beta\cos\gamma + x\cos\beta\cos\alpha - y\sin^2\beta);$
$dw = d\omega(y\cos\alpha - x\cos\beta) - \omega(y\sin\alpha d\alpha - x\sin\beta d\beta) + \omega^2 dt(x\cos\gamma\cos\alpha + y\cos\gamma\cos\beta - z\sin^2\gamma)$
Далее следует определение моментов dP, dQ, dR, приложенных к элементу dM сил относительно главных центральных осей инерции [3]. В соответствии с приведенными выше формулами имеем:
$dP = \dfrac{dM}{dt}\cdot(yd\omega - zdv) = d\omega[(y^2+z^2)\cos\alpha - xy\cos\beta - zx\cos\gamma - \omega[(y^2+z^2)\sin\alpha d\alpha - xy\sin\beta d\beta - \sin\gamma d\gamma] + \omega^2 dt[(y^2-x^2)\cos\beta\cos\gamma + xy\cos\gamma\cos\alpha - yz\sin^2\gamma - zx\cos\alpha\cos\beta + zy\sin^2\beta]].$
Аналогично находятся dQ и dR.
Теперь, интегрируя по объему тела, Эйлер находит уравнения.

$$\begin{cases}P = \dfrac{d}{dt}\cdot[Ad\omega\cos\alpha - \omega Ad\alpha\sin\alpha + \omega^2(C-B)dt\cos\beta\cos\gamma],\\ Q = \dfrac{d}{dt}\cdot[Bd\omega\cos\beta - \omega Bd\beta\sin\beta + \omega^2(A-C)dt\cos\gamma\cos\alpha],\\ R = \dfrac{d}{dt}\cdot[Cd\omega\cos\gamma - \omega Cd\gamma\sin\gamma + \omega^2(B-A)dt\cos\alpha\cos\beta],\end{cases} \qquad (2)$$

где A, B, C — центральные моменты инерции тела.

Последние уравнения позволяют дать ответ на вопрос, обратный приведенному выше: заданы силы, действующие на тело, вращающегося вокруг оси, проведенной через его центр инерции, с угловой скоростью ω; как за время dt изменятся положение оси вращения и угловая скорость тела?

Сначала Эйлер исходит непосредственно из уравнений (2). Так, с помощью линейной комбинации этих уравнений он находит

$$d\omega = \frac{(C-B)(A-C)(B-A)}{ABC} \cdot \omega^2 dt \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma + dt\Big(\frac{P\cos\alpha}{A} + \frac{Q\cos\beta}{B} + \frac{R\cos\gamma}{C}\Big).$$

Но дальше он обращает внимание на то, что уравнениям (2) можно придать значительно более простой вид, если перейти к величинам

$$p = \omega\cos\alpha, \quad q = \omega\cos\beta, \quad r = \omega\cos\gamma$$

— составляющим угловой скорости в системе центральных осей инерции [4]. Так впервые появляются эйлеровы уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

$$\begin{cases} P = A \cdot \dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr, \\ Q = B \cdot \dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp, \\ R = C \cdot \dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq. \end{cases} \tag{3}$$

Эйлер подчеркивает значение своего открытия, указывая, что «итог всей Теории Движения твердых тел содержится в этих трех достаточно простых формулах». Вместе с тем выявляется потребность использовать подвижную систему координат, неподвижно связанную с телом, — систему его главных осей инерции. Введение подвижного трехгранника было важным этапом как в развитии механики, так и в развитии геометрии. В связи с этим Эйлер ввел различные способы определения положения подвижной координатной системы относительно неподвижной, в частности, названные его именем углы (впервые введенные им в 1748 г.). В этих исследованиях Эйлера важное место занимают методы сферической тригонометрии, в которую он внес значительный вклад.

Эйлеру удалось продемонстрировать самое важное применение уравнений (3) — решение с их помощью задачи о вращении твердого тела вокруг точки по инерции. Далее Эйлер решает задачу для случая трех или двух равных главных моментов инерции. В случае попарно неравных моментов при отсутствии внешних сил он выражает закон движения через дуги конических сечений, т. е. через эллиптические интегралы, и рассматривает условия, при которых решение сводится к элементарным интегралам [5].

Эта основополагающая в теории гироскопа задача станет предметом изысканий многих ученых.

Специальным прикладным разделом динамики твердого тела с одной неподвижной точкой является теория гироскопа. Развитие этой практической области началось после 1851 г., когда Л. Фуко поставил в Парижском Пантеоне знаменитый опыт с качающимся маятником, обнаруживающим вращение Земли и позволяющим измерить угловую скорость ее вращения. Через год Фуко сконструировал прибор, названный им гироскопом, основная деталь которого — массивный маховик, быстро вращающийся в трехосном кардановом подвесе. Принципиальные возможности прибора Фуко для наблюдения вращения Земли, для сохранения ориентации системы в инерционном пространстве, для измерения долготы и широты местности были выявлены уже самим изобретателем этого прибора. Однако на пути использования гироскопа в указанных целях стояли разнообразные технические трудности: прибор теперь представлял собой не одно твердое тело, а систему тел, на которую действовали мало изученные силы (трения, сопротивления, упругие силы и пр.). Многие технические трудности были преодолены в достаточно совершенных конструкциях гироскопических устройств Г. Аншютца–Кемпфе, Э. Сперри в конце XIX и в начале XX в.

В XX в. в результате длительных усилий ученых, инженеров и технологов было достигнуто высокое совершенство гироскопических приборов. Стабилизация с помощью гироскопа была блестяще продемонстрирована И. В. Мещерским [6]. Иван Всеволодович Мещерский в 1921 году в рамках проекта «Гироскопическая однорельсовая железная дорога Петербург-Гатчина» представил статью «Дифференциальные уравнения движения гироскопического вагона однорельсовой железной дороги». Предметом его исследования стало составление точных дифференциальных уравнений движения гироскопического вагона и определение с помощью этих уравнений величины погрешностей, которые допускаются в том случае, когда движение вагона выражается приближенными линейными дифференциальными уравнениями.

Динамические уравнения Эйлера являются основой целых классов современных исследований, обеспечивающих развитие техники. Опираясь на этот фундамент современное точное приборостроение успешно решает проблемы конструирования инерциальных навигационных систем как для мирных (обеспечения полета и возвращения космических кораблей), так и для военных (вывод в район и доведение до цели высокоточного оружия [7]) целей. База, заложенная Леонардом Эйлером, позволяет создавать достаточно достоверные компьютерные модели твердых тел, которые кроме сугубо научно-технической пользы повышают интерес студентов к механике, физике и ИКТ. Отдельно стоит отметить применение уравнений Эйлера–Лагранжа в качестве основы для разработки новых математических моделей систем стабилизации полезной нагрузки. Которые позволяют совершенствовать уже созданные (путем перехода от общего вида описания возмущающих параметров к функциям от кинематических параметров качки основания и элементов подвеса в системе с динамически настраиваемым гироскопом[8]) и изобретать новые (описание способов стабилизации двуногих роботов на подвижной опоре[9]) стабилизирующие устройства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* Mechanika sive Scientia motus analytice exposita. Petropoli. — L. Euleri Opera Omnia, ser. II, 1736, v. I, II.
2. *Эйлер Л.* Основы динамики точки. М.–Л., ОНТИ, 1938. // *Euler L.* Basics of point dynamics. M.-L., ONTI, 1938.
3. *Euler L.* Scientia navalis seu Tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Petropoli, 1749. L. Euler a Petropolis, 1749, t.1, I.
4. был 5 *Euler L.* Déouverte d'un nouveau principe de mćanique. Mémoires Acad. sc. Berlin, v. 6 (1750), 1752. Opera Omnia, ser. II, v. V.
5. *Григорьян А. Т.* Механика от античности до наших дней. М.: Изд-во «Наука», 1974. // *Grigoryan A. T.* Mechanics from antiquity to the present day. Moscow: Publishing house "Science". 1974.
6. *Юлина А. О.*, *Бородин Д. В.* О работе И. В. Мещерского в области гироскопической стабилизации монорельсового вагона. — История науки и техники, 2020, № 4, с. 45–52. // *Yulina A. O.*, *Borodin D. V.* About the work of I. V. Meshchersky in the field of gyroscopic stabilization of a monorail car. — History of Science and Technology, 2020, № 4, S. 45–52.

7. *Бабичев В. И.*, *Грязев М. В.* Разработка бортовых гироскопов противотанковых управляемых артиллерийских снарядов. — Известия Тульского государственного университета, 2017. // *Babichev V. I.*, *Gryazev M. V.* Development of airborne gyroscopes for anti-tank guided artillery shells. — Bulletin of the Tula State University, 2017.
8. *Малютин Д. М.* Система стабилизации полезной нагрузки на динамически настраиваемом гироскопе. — Приборы и методы измерений, 2016. // *Malyutin D. M.* Payload stabilization system on a dynamically tuned gyroscope. — Instruments and measurement methods, 2016.
9. *Базылев Д. Н.*, *Пыркин А. А.*, *Маргун А. А.* Способы стабилизации двуногих роботов в положении стоя на подвижной опоре. — Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, 2015. // *Bazylev D. N.*, *Pyrkin A. A.*, *Margun A. A.* Methods for stabilizing bipedal robots in a standing position on a movable support. — Scientific and technical bulletin of information technologies, mechanics and optics, 2015.

UDC 531.091

Yulina A. O., ***Borodin D. V.*** (Saint-Petersburg, Military Space Academy named after A. F. Mozhaysky)**. Rotational motion with respect to a fixed point. The history of analytical solution.**

Abstract: Abstract: The rigid body rotation around a fixed point was considered by L. Euler, we shall examine his solution. Euler was the first who classified basic problems of Mechanics. In Dynamics he chose two groups: the first (direct) problem if kinematic parameters of motion are given, find forces; the second (inverse) one if all forces given, find kinematic characteristics. The Euler kinematic and dynamic equations of motion of a rigid body around a fixed point are now well known. We examine their genesis in detail in Euler's study. It is shown that analytical solution of the problem to be considered became a base of gyroscope theory and has obtained wide technical application in stabilization and navigation problems.

Keywords: Euler, Lagrange, Kovalevskaya, rigid body, rotation, analytical solution, gyroscope.