ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 27 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2020

**А. И. Седов** (Челябинск, ЮУрГУ(НИУ)). **Приближенное нахождение запаздывания в обратной задаче спектрального анализа для оператора Чебышёва.**

УДК 517.927.4

*Резюме*: Рассматривается сингулярный дифференциальный оператор типа Чебышёва первого рода с запаздывающим возмущением. Рассматривается задача нахождения функции запаздывания по заданной последовательности собственных чисел оператора. Строится алгоритм позволяющий найти приближенное запаздывание.

*Ключевые слова*: Многочлены Чебышёва, след оператора, ядерный оператор, непрерывное запаздывание, собственные числа, сингулярный дифференциальный оператор.

Рассмотрим следующую задачу: для возрастающей последовательности чисел $\xi_n > 0$ найти функцию $p$, для которой уравнения

$$-(1-x^2)y''(x) + xy'(x) + (2-p'(x))y(\cos\{\arccos x - p(x)\}) = \xi_n y(x), \quad x \in [-1,1]$$

имеют решения. При этом, будем полагать, что строго убывающая функция $p$ с непрерывной производной, удовлетворяет условиям: $p(-1)=\pi$, $p(1)=0$, $\|p'\|_{L_2(-1,1)} \leqslant \|p\|_{L_2(-1,1)}$.

Мы будем решать эту задачу используя метод обратной спектральной задачи рассмотренный в [1], а также использовать методы и идеи заложенные [2–4].

Для решения задачи введем дифференциальный оператор $T$ действующий в пространстве $L_2^w(-1,1)$ с весом $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ :

$$Ty(x) = -(1-x^2)y''(x) + xy'(x).$$

Собственным значениям $\lambda_n = n^2$ оператора $T$ соответствуют ортонормированные в $L_2^w(-1,1)$ функции $v_n(x) = h_n^{-\frac{1}{2}} T_n(x)$, $n = \overline{0,\infty}$, где $h_0 = \pi$, $h_n = \dfrac{\pi}{2}$, $T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода степени $n$ со старшим коэффициентом $2^{n-1}$.

Введем также возмущенный оператор $T+P$ действующий в пространстве $L_2^w(-1,1)$ :

$$(T+P)y(x) = -(1-x^2)y''(x) + xy'(x) + (2-p'(x))y(\cos\{\arccos x - p(x)\}).$$

Обозначим: $R_0(\lambda)$ — резольвента оператора $T$, $\|\cdot\|_2$ — норма Гильберта–Шмидта, $r_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{2}$, $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| = r_n\}$, $n = 1,2,\ldots$, $r_0 = r_1$, $\gamma_0 = \{\lambda : |\lambda| = r_0\}$.

**Теорема.** *Если для последовательности* $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *существует* $r > 0$ *такое, что выполняются неравенства:*

$$\omega := \frac{\pi r^2}{(\frac{1}{2} - r)^2} \max_{\lambda \in \gamma_0} \|R_0(\lambda)\|_2^4 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \frac{r r_n}{n^2 (1 - \frac{r}{r_n})} \max_{\lambda \in \gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \Big)^2 < 1,$$

$$\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n - \lambda_n|^2}{n^2} < (1-\omega)^2 r^2,$$

*то в шаре* $U(0,r) \subset L_2(-1,1)$ *существует функция* $p$ *такая, что для спектра оператора* $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}$ *имеют место равенства* $\mu_n = \xi_n$.

При доказательстве теоремы используется принцип сжимающих отображений, откуда и вытекает алгоритм нахождения приближенной функции $p$. Приводится пример построения такой функции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sedov A. I.* The use of the inverse problem of spectral analysis to forecast time series. — J. Comp. Eng. Math., (2019), 6:1 p. 74–78. https://doi.org/10.14529/jcem190108
2. *Седов А. И.* О существовании решения одной задачи теории уравления. — Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009, т. 16, № 6, с. 1120.
3. *Dubrovskii V. V., Sedov A. I.* Asymptotics of eigenvalues of a singular differential operator of the Jacobi type. — Doklady mathematics, 1997, v. 55, № 2, p. 206–210.
4. *Sadovnichii V. A., Dubrovskii V. V., Sedov A. I., Tipko A. N.* The inverse problem of spectral analysis for a Jacobi-type operator with potential. — Doklady mathematics, 2001, v. 64, № 3, p. 359–360.

УДК 517.927.4

***Sedov A. I.*** (Chelyabinsk, South Ural State University (national research university)) **. Approximate finding of delay in inverse spectral problem for operator Chebyshev.**

*Abstract*: A singular differential operator of the Chebyshev type with a delayed perturbation is considered. The problem of finding the delay function according to the given sequence of eigennumbers of the operator is considered. An algorithm is built that allows you to find an approximate delay.

*Keywords*: Chebyshev polynomials, trace of operator, operator of trace class, continuous delay, eigenvalues, singular differential operator.