ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 27 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2020

А. В. Калинкин, С. С. Домашенко (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **О спектральных функциях уравнений марковского процесса эпидемии $\mathbf{T_1 + T_2 \to 2T_1;\ T_1 \to 0}$.**

УДК 519.21

Резюме: Анализируются уравнения Колмогорова для марковского процесса эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика.

Ключевые слова: Четверть плоскости, марковский процесс на трапеции.

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$, переходные вероятности $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1+1,\alpha_2-1)}(t) = \alpha_1\alpha_2 t + o(t)$, $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}(t) = \lambda\alpha_1 t + o(t)$, $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - (\alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_1)t + o(t)$ $(\lambda > 0)$. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}/(\alpha_1!\alpha_2!) F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2)$, $F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$, $|s_1| \leqslant 1$, $|s_2| \leqslant 1$, удовлетворяет первому и второму уравнениям Колмогорова [1]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2}\Big) + \lambda z_1 \Big(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\Big),\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = (s_1^2 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda(1 - s_1)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1},$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$. Решение системы линейных уравнений в частных производных имеет вид спектрального ряда

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} A_{\alpha_1\alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) e^{-(\alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_1)t}. \tag{1}$$

Подставляя ряд в уравнения системы, получаем уравнения, $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots,$

$$z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2)}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}\Big) + \lambda z_1 \Big(\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) - \frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2)}{\partial z_1}\Big) + (\alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_1)\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) = 0;$$

$$(s_1^2 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda(1 - s_1)\frac{\partial C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2)}{\partial s_1} + (\alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_1) C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) = 0.$$

Теорема 1. *Собственная функция имеет вид,* $\alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, \ldots,$

$$\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) = z_1 z_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} f_{\alpha_1-1}\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big) + \ldots + z_1 z_2^{\alpha_1+\alpha_2+k} f_{\alpha_1+k}\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big) + \ldots,$$

$f_{\alpha_1-1}(v), \ldots, f_{\alpha_1+k}(v), \ldots$ *многочлены степени* $\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_1 + k, \ldots$ *удовлетворяют цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений,* $k = -1, 0, 1, \ldots,$

$$(v^2 + v) f''_{\alpha_1+k}(v) + (2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + k - 2 + \lambda)v) f'_{\alpha_1+k}(v) + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - k + \lambda(\alpha_1 - 1)) f_{\alpha_1+k}(v) + \lambda v f_{\alpha_1+k-1}(v) = 0; f_{\alpha_1-2}(v) = 0.$$

Теорема 2. *Собственная функция имеет вид,* $\alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, \dots,$

$$C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1+\alpha_2} f_{\alpha_1+\alpha_2}\left(\frac{s_2}{s_1}\right) + \ldots + s_1^{\alpha_2} f_{\alpha_2}\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$
$$+ s_1^{\alpha_2-1} f_{\alpha_2-1}\left(\frac{s_2}{s_1}\right) + \ldots + s_1 f_1\left(\frac{s_2}{s_1}\right) + f_0,$$

$f_{\alpha_1+\alpha_2}(w), \dots, f_{\alpha_2}(w)$ *многочлены степени* α_2, $f_{\alpha_2-1}(w), \dots, f_1(w)$ *многочлены степеней* $\alpha_2 - 1, \dots, 1$ *и* $f_0(w) = f_0$ *— константа, удовлетворяют цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений,* $k = 0, 1, \dots, \alpha_1 + \alpha_2,$

$$(w^2 - w) f''_{\alpha_1+\alpha_2-k}(w) + (\alpha_1 + \alpha_2 - k - 1 + (k + 1 - \alpha_1 - \alpha_2 + \lambda)w) f'_{\alpha_1+\alpha_2-k}(w)$$
$$+ (\alpha_1\alpha_2 - \lambda(\alpha_2 - k)) f_{\alpha_1+\alpha_2-k}(w)$$
$$- \lambda w f'_{\alpha_1+\alpha_2-k+1}(w) + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 - k + 1) f_{\alpha_1+\alpha_2-k+1}(w) = 0; \ f_{\alpha_1+\alpha_2+1}(w) = 0.$$

Исследование слагаемых спектрального ряда (1), соответствующих слагаемым с $\alpha_1 = 0$ или $\alpha_2 = 0$, представляет собой отдельную задачу.

Для марковского процесса эпидемии [1] известные решения ([2], [3] и др.) второго уравнения Колмогорова имеют труднообозримый громоздкий вид. Данные в теореме 1 и теореме 2 цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений решаются при начальных значениях параметра k: $f_{\alpha_1-1}(v) = {}_2F_1(1 - \alpha_1, -\alpha_2 + 1 - \lambda; 2; -v)$, $f_{\alpha_1+\alpha_2}(w) = {}_2F_1(-\alpha_2, -\alpha_1 + \lambda; -\alpha_1 - \alpha_2 + 1; w)$, ${}_2F_1(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция; последующие многочлены выражаются как интегралы, близкие к гипергеометрическому типу [4]. Предположительно, замкнутые и компактные представления для собственных функций $\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2)$, $C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2)$ есть интегралы от гипергеометрической функции двух аргументов [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Севастьянов Б. А.* Эпидемии процесс. — В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. Кол. 1008.
2. *Gani J.* On a partial differential equation of epidemic theory. I. — Biometrika, v. 52, № 3/4, p. 617–622.
3. *Siskind V.* A solution of the general stochastic epidemic. — Biometrika, v. 52, № 3/4, p. 613–616.
4. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973, 296 с.

УДК 519.21

Kalinkin A. V., Domashenko S. S. (Moscow, Bauman Moscow State Technical University)**. On the spectral functions of the equations of the Markov process of the epidemic $\mathbf{T_1 + T_2 \to 2T_1;\ T_1 \to 0}$.**

Abstract: The Kolmogorov equations for the Markov process of the Bartlett-McKendrick epidemic are analyzed.

Keywords: A quarter of the plane, the Markov process on the trapeze.