ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 27 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2020

В. А. Пчелинцев (Томск, НИ ТПУ). **Оценки собственных значений оператора p-Лапласа.**

УДК 517.956.227

Резюме: Данная работа посвящена спектральным оценкам оператора p-Лапласа с краевым условием Неймана в областях евклидова пространства. Предложенный метод основан на операторах композиции, порожденных квазиконформными отображениями и их приложениях к неравенствам Пуанкаре-Соболева.

Ключевые слова: p-лапласиан, краевая задача Неймана, собственное значение, квазиконформные отображения.

В работе предлагаются нижние оценки для первых нетривиальных собственных значений оператора p-Лапласа с краевым условием Неймана в квазиконформных регулярных областях.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, некоторая область (открытое связное множество). Область Ω называется K-квазиконформной β-регулярной областью относительно единичного шара $\mathbb{B}$, если существует K-квазиконформное отображение $\varphi : \mathbb{B} \to \Omega$ такое, что

$$\int\limits_{\mathbb{B}} |J(x,\varphi)|^{\beta}\, dx < \infty \quad \text{для некоторого} \quad \beta > 1,$$

где $J(x,\varphi)$ — якобиан отображения φ.

Отметим, что класс квазиконформных регулярных областей включает липшицевы области, области Геринга [1] и может быть описан в терминах квазигиперболической геометрии [2].

Наша техника базируется на связях между геометрической теорией операторов композиции в пространствах Соболева и теорией квазиконформных отображений [3]. Положим $\mu_p^{(1)}(\Omega)$ — первое нетривиальное собственное значение оператора p-Лапласа. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть Ω — K-квазиконформная β-регулярная область относительно единичного шара $\mathbb{B}$, $r = p\beta/(\beta-1)$, $p > n$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\frac{1}{\mu_p^{(1)}(\Omega)} \leqslant \inf_{q\in(q^*,n]} \left\{ \frac{2^{np}}{n^p} \left(\frac{1-\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}+\frac{1}{r}} \right)^{p-\frac{p}{q}+\frac{p}{r}} \omega_n^{\frac{p}{r}-\frac{p}{n}} \right\} K^{\frac{p}{n}} |\Omega|^{\frac{p-n}{n}} \cdot ||J_\varphi \mid L_\beta(\mathbb{B})||,$$

где $q^* = \beta np/(\beta p + n(\beta-1))$ и $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

В случае K-квазиконформных ∞-регулярных областей имеем

Теорема 2. *Пусть Ω — K-квазиконформная ∞-регулярная область относительно единичного шара $\mathbb{B}$. Тогда для любого $p > n$ справедливо следующее неравенство*

$$\frac{1}{\mu_p^{(1)}(\Omega)} \leqslant \inf_{q\in(q^*,n]} \left\{ \frac{2^{np}}{n^p} \left(\frac{1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \right)^{p+1-\frac{p}{q}} \omega_n^{1-\frac{p}{n}} \right\} K^{\frac{p}{n}} |\Omega|^{\frac{p-n}{n}} \cdot ||J_\varphi \mid L_\infty(\mathbb{B})||,$$

где $q^* = np/(p+n)$ *и* $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$ *— объем единичного шара в* $\mathbb{R}^n$.

Замечание. В случае конформных регулярных областей нижняя оценка для $\mu_p^{(1)}(\Omega)$ была установлена в [4].

Работа поддержана РНФ, грант № 20-71-00037.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Astala K.*, *Koskela P.* Quasiconformal mappings and global integrability of the derivative. — J. Anal. Math., 1991, v. 57, p. 203–220.
2. *Koskela P.*, *Onninen J.*, *Tyson J. T.* Quasihyperbolic boundary conditions and capacity: Poincaré domains. — Math. Ann., 2002, v. 323, p. 811–830.
3. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева. — Сиб. матем. ж., 1993, т. 34, №. 1, с. 185–192.
4. *Gol'dshtein V.*, *Pchelintsev V.*, *Ukhlov A.* On the first eigenvalue of the degenerate p-Laplace operator in non-convex domains. — Integral Equ. Oper. Theory, 2018, v. 90, p. 1–21.

УДК 517.956.227

Pchelintsev V. A. (Tomsk, Tomsk Polytechnic University). **Estimates of eigenvalues of the p-Laplace operator.**

Abstract: This notice is devoted to the spectral estimates of the p-Laplacian with Neumann boundary condition on Euclidean space domains. The suggested method is based on composition operators generated by quasiconformal mappings and their applications to Sobolev-Poincaré inequalities.

Keywords: p-Laplacian, Neumann boundary problem, eigenvalues, quasiconformal mappings.