ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2024

А. М. Ветошкин (Москва, МФ МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Решение однородного дискретного уравнения Сильвестра, коэффициенты которого являются жордановыми клетками.**

УДК 512.643.8 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Резюме: Приведено общее решение однородного дискретного уравнения Сильвестра, когда коэффициенты уравнения являются жордановыми клетками. Случай произвольных коэффициентов дискретного уравнения Сильвестра сводится к указанному.

Ключевые слова: однородное дискретное уравнение Сильвестра, теплицева верхняя треугольная матрица, жордановы клетки, матрица Паскаля.

Решаем дискретное уравнение Сильвестра [1, 2]:

$$J_m(x)ZJ_n(y) - xyZ = 0; \qquad x, y \neq 0, \tag{1}$$

где Z неизвестная матрица размера $m \times n$. $J_m(x), J_n(y)$ — жордановы клетки: $J_m(x) = xI_m + T_m$.

Матрица вида $W = \sum_{k=0}^{n-1} w_k T_n^k$ является теплицевой верхней треугольной. Назовем множество таких матриц — ТВТ матрицами. Определим матрицу $S_k(x) = \operatorname{diag}(1, x, x^2, \ldots, x^{k-1})$. Случай $x = -1$ обозначим особо: $S_k(-1) = S_k = S$. Выполняется такое равенство:

$$J_k(x) = xS_k(x)(I_k + T_k)S_k(x^{-1}). \tag{2}$$

Сделаем в (1) замену $V = S_m(x^{-1})ZS_n(y)$ и учитывая (2) получим:

$$(I_m + T_m)V(I_n + T_n) - V = 0. \tag{3}$$

Из (3) имеем $(I_m + T_m)V = V(I_n + T_n)^{-1}$ и $T_mV = V(-T_n + T_n^2 - \cdots)$. Следовательно, умножение решения уравнения (3) на ТВТ матрицу слева можно заменить умножением на некую ТВТ матрицу справа. Таким образом:

Лемма 1. *Если V является решением уравнения* (3), *то для любой матрицы $W_1 \in TBT_m$ существует матрица $W_2 \in TBT_n$ так что $W_1V = VW_2$.*

Из уравнения (3) получаем следующее эквивалентное уравнение:

$$T_mV + VT_n + T_mVT_n = 0. \tag{4}$$

Лемма 2. *Если матрица V является решением уравнения* (4), *то умножив эту матрицу на ТВТ матрицу слева или справа, снова получим решение уравнения* (4).

Эта лемма следует из коммутативности ТВТ матриц и матрицы T.

Из формулы (4) получаем что элементы матрицы V удовлетворяют таким уравнениям

$$(i,j): \quad \nu_{i,j-1} + \nu_{i+1,j} + \nu_{i+1,j-1} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{5}$$

В результате простых рассуждений из (5) получаем, что матрица V должна быть верхней треугольной:

Лемма 3. V *— решение уравнения* (4) *имеет вид*:

$$m \geqslant n: \quad V = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}, \quad m < n: \quad V = [0 \;\; U]. \tag{6}$$

Матрица U *является квадратной, верхней треугольной, на главной диагонали которой стоят одинаковые по модулю числа, знаки которых чередуются.*

Решение уравнения (4) определено с точностью до скалярного множителя. Если $u_{1,1} \neq 0$, то выберем этот множитель так, что $u_{1,1} = 1$. Из леммы 3 следует, что на главной диагонали матрицы U будут чередоваться единицы и минус единицы. Умножение такой матрицы на ТВТ матрицу, у которой на диагонали стоят единицы, не нарушит этого чередования единиц матрицы U.

Пусть у решения уравнения (4) матрицы U в первой строке стоят элементы $(1, u_{12}, u_{13}, \ldots, u_{1n})$. Рассмотрим ТВТ матрицу W, у которой первая строка будет такой же. Тогда у матрицы UW^{-1} первая строка будет такой $(1, 0, 0, \ldots, 0)$. Затем построим ТВТ матрицу W_1 такую, что её первая строка состоит из плюс-минус единиц: $(1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1})$. Рассмотрим матрицу $U_1 = UW^{-1}W_1$, по лемме 2 она есть решение уравнения (4). У этой матрицы в первой строке и на главной диагонали чередуются плюс-минус единицы. Будем рассматривать столбцы этой матрицы до главной диагонали включительно. Второй столбец состоит из двух минус единиц $[-1 \;\; -1]^T$. Следующий столбец будет определяться по формуле (5): $[1 \;\; 2 \;\; 1]^T$. Следующий: $[-1 \;\; -3 \;\; -3 \;\; -1]^T$ и т. д. Сумма двух соседних элементов из одного столбца определяет элемент из следующего столбца: $-(\nu_{i,j-1} + \nu_{i+1,j-1}) = \nu_{i+1,j}$. Мы видим, что содержимое нашей матрицы определяется единственным образом. Её столбцы составляют, с точностью до знака, элементы треугольника Паскаля. Определим матрицу Паскаля [3] как верхнюю треугольную матрицу $P = \{p_{ij}\}$, где $p_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$. Чередование знаков столбцов в матрице U_1 обеспечим умножением на матрицу S: $U_1 = PS$. Таким образом, найдено решение уравнения (1). В случае квадратной матрицы Z результат формулируется так:

Теорема. *В случае, когда* $m = n$ *общее решение уравнения* (1) *дается формулой*:

$$Z = S(x) \cdot WPS \cdot S(y^{-1}), \tag{7}$$

где W *произвольная теплицева верхняя треугольная матрица.*

Множитель W в (7) может быть переставлен: $Z = S(x) \cdot PSW \cdot S(y^{-1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Икрамов Х. Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984, 192 с. // *Ikramov Kh. D.* Numerical solution of matrix equations. Moscow: Nauka Publ., 1984, 192 p.
2. *Ветошкин А. М.* Конечное выражение для решения дискретного уравнения Сильвестра. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2016, т. 23, в. 4, с. 334–335. // *Vetoshkin A. M.* The finite expression for the solution of the discrete Sylvester equation. — Survey of Applied and Industrial Mathematics, 2016, v. 23, is. 4, p. 334–335.
3. *Call G. S.*, *Velleman D. J.* Pascal's matrices. — Am. Math. Monthly, 1993, v. 100 (4), p. 372–376.

Поступила в редакцию
07.VIII.2024

UDC 512.643.8 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Vetoshkin A. M (Moscow, Mytishchi branch Bauman State Technical University).
Solution of the homogeneous discrete Sylvester equation, whose coefficients are Jordan cells.

Abstract: A general solution of the homogeneous discrete Sylvester equation is given when the coefficients of the equation are Jordan cells. The case of arbitrary coefficients of the discrete Sylvester equation is reduced to the one indicated.

Keywords: homogeneous discrete Sylvester equation, Toeplitz upper triangular matrix, Jordan cells, Pascal's matrix.