

В. Г. Бурмистрова, А. А. Бутков (Ульяновск, УлГУ).
Оптимальное управление параметрами разладок в задаче увеличения
срока службы эксплуатации объекта.

УДК 51.76+519.248

DOI <https://doi.org/10.52513/08698325.2024.31.1.1>

Резюме: В работе рассматривается постановка задачи об оптимальном управлении процессами с разладками. При этом для одного важного частного случая формируется и решается задача нахождения оптимального значения параметра, характеризующего интенсивность возникновения разладки. В качестве критерия рассматривается функционал, учитывающий распределение момента первого пересечения фиксированной границы процессом с разладкой и управляемым параметром. Задача решается как аналитическим, так и имитационным способом.

Ключевые слова: задача о разладке, имитационное моделирование, задача о пересечении границы.

Пусть задан стохастический базис $B = (\Omega, \mathcal{F}, F = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ (т.е. вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$), снабженное неубывающим непрерывным справа потоком σ -алгебр $F = (F_t)_{t \geq 0}$, пополненным по мере P (т.е. выполняются условия [1]). Предполагается, что на стохастическом базисе B заданы стандартный винеровский процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$ и экспоненциально распределенный момент остановки ς , в дальнейшем называемый моментом разладки.

Таким образом, рассматривается простой процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с разладкой [2], происходящей в экспоненциально распределенный момент ς с параметром $\lambda > 0$: $X_t = \alpha \int_0^t I(s > \varsigma) ds + W_t$, где $I(\cdot)$ — индикаторная функция, параметр $\alpha \in R$, W_t — броуновское движение (стандартный винеровский процесс) с единичным коэффициентом диффузии.

Определим на базисе B для некоторой «границы» $b > 0$ P -п.н. конечный момент остановки $\tau = \tau(b)$ — первый момент пересечения (достижения) конечной границы b процессом $X = (X_t)_{t \geq 0}$: $\tau = \inf(t > 0 : X_t \geq b)$. Рассматривается задача оценивания момента τ по наблюдениям траекторий (реализаций) процесса X до момента времени $t > 0$, т.е. при условии порожденной наблюдениями σ -алгебры $F_t^X = \sigma(X_s; s \in [0; t])$. При этом предполагается, что поток σ -алгебр $F^X = (F_t^X)_{t \geq 0}$ соответствующим образом пополнен множеством нулевой меры так, чтобы выполнялись условия полноты и регулярности.

Момент τ при каждом значении $b > 0$ не только конечен, но и интегрируем при $\alpha > 0$: $E\tau = \int_0^t e^{-\lambda x} dx$, $E\tau < \infty$ и $EW_\tau = 0$ (по теореме об остановленном мартингале). В силу F_t -измеримости случайных величин $I(\varsigma < t)$, $I(\tau < t)$ получаем: $EX_\tau = \alpha E(\tau - \varsigma)^+$.

В ситуации, когда момент разладки еще не произошел, а момент остановки τ уже наступил, задача о пересечении границы сводится к задаче пересечения границы b винеровским процессом, т.е. до момента ς достижения процессом границы $b > 0$ осуществляется с функцией распределения времени прохождения уровня b винеров-

ским процессом [3]:

$$F_\tau(t) = P(\tau \leq t) = P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq b\right) = \int_0^t (b/\sqrt{2\pi s^3} e^{-b^2/2s}) ds.$$

В силу выше перечисленного, получаем, что величина $E\tau$ равна $E\tau = b/\alpha + 1/\lambda + f(\lambda)/\alpha$, где $\alpha > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$ и $f(\lambda) = E(\tau - \varsigma)\Delta I(\tau - \varsigma < 0) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \int_0^x (b/\sqrt{2\pi y} e^{-b^2/(2y)}) dy dx$.

Рассматривается целевая функция $\varphi(\lambda) : \varphi(\lambda) = E\tau + \gamma\Delta\lambda$, где увеличение компонента $E\tau$ соответствует естественному «требованию» увеличения срока эксплуатации объекта с разрядкой в ς и моментом его «разрушения» в τ . Компонента $\gamma\Delta\lambda$ с $\gamma > 0$ при этом должна также в естественных условиях уменьшаться, поскольку ее увеличение соответствует ослаблению дополнительных воздействий на систему, которые могли бы снизить вероятность возникновения разрядки за конечный период времени.

Таким образом, решение задачи оптимизации $\varphi(\lambda^*) = \inf_\lambda \varphi(\lambda)$ определяется из уравнения $-1/(\lambda^*)^2 + 1/\alpha(df(\lambda^*)/(d\lambda^*)) + \gamma = 0$, которое решается численными методами. На рис. 1 можно увидеть изменение целевой функции $\varphi(\lambda)$ в зависимости от изменения λ .

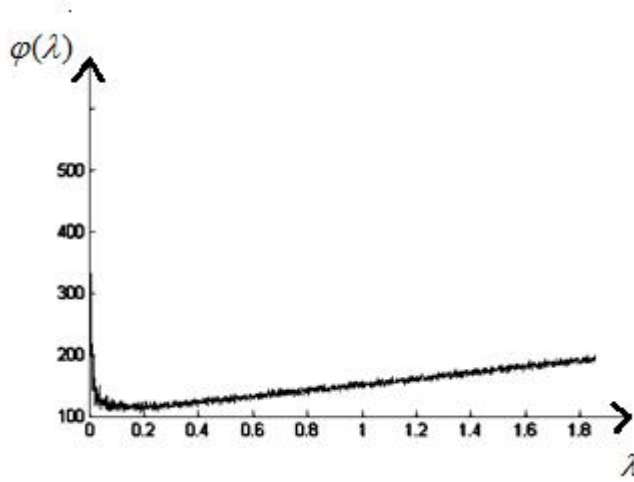


Рис. 1. Изменение целевой функции $\varphi(\lambda)$ в зависимости от параметра λ

При параметрах модели $b = 1$, $\alpha = 0,01$, $X_0 = 0$, $\gamma = 0,01$ решением задачи оптимизации является $\lambda^* = 0,1$. Модели, приведенные в данной работе, можно применять как при анализе технических, так и биологических систем, т.е. там, где наблюдаются процессы с изменяющимися показателями в определенный момент.

Эти задачи, помимо общего теоретико-вероятностного интереса имеют многочисленные применения в прикладных областях теории случайных процессов и математической статистики: непараметрических критериях статистики, теории массового обслуживания, теории оптимальных правил остановки и др.

Рассматриваемая в работе задача оптимизации интересно было бы решить в рамках серии задач граничных функционалов, например, в случае нелинейных границ. Важной особенностью данной работы является то, что случай (рассмотренный в этой работе) легко допускает обобщение на ситуацию множественной разрядки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деллашери К. Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975, 192 с. // *Dellacheri K. Capacities and random processes.* — М.: Mir, 1975, 192 p. (In Russian.)
2. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1976, 272 с. // *Shiryayev A. N. Statistical sequential analysis.* — Moscow: Nauka, 1976, 272 p. (In Russian.)
3. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985 // *Korolyuk V. S., Portenko N. I., Skorokhod A. V., Turbin A. F. Handbook of Probability Theory and Mathematical Statistics.* М.: Nauka, 1985. (In Russian.)

Поступила в редакцию
28.VIII.2024

UDC 51.76+519.248

DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Burmistrova V. G. Butov A. A. (Ulyanovsk, Ulyanovsk State University). **The Optimal control of parameters of the processes with change-point to the problem of increasing the service life of an object**

Abstract: In the article we consider the formulation of the problem of optimal control of processes with change-point. At the same time, for one important quotient, the problem of finding the optimal parameter value characterizing the intensity of the change-point is formed and solved. As a criterion, we consider a functional that takes into account the distribution of the moment of the first crossing fixed boundary by a process with a change-point with a controlled parameter.

Keywords: the task of debugging, simulation modeling, the task of crossing the border.