ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2024

А. В. Калинкин, А. В. Мастихин (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Численные оценки вероятности остановки случайного блуждания на отрезке.**

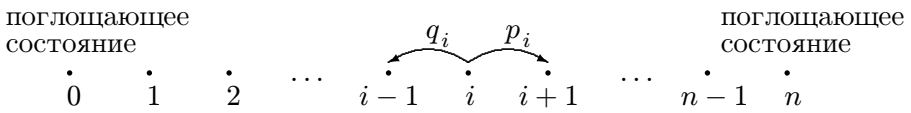
УДК 519.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Резюме: Численно сравниваются две формулы для вероятности остановки на границе случайного блуждания.

Ключевые слова: случайное блуждание, целочисленный отрезок.

На множестве состояний $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ рассматривается случайное блуждание $S, t = 0, 1, \ldots$. Переходные вероятности за один шаг равны

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{S_{t+1} = i-1 | S_t = i\} &= q_i, \\
\mathbf{P}\{S_{t+1} = i+1 | S_t = i\} &= p_i, \\
q_i > 0,\ \ p_i > 0,\ \ q_i + p_i &= 1 \ \text{ при } \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \\
\mathbf{P}\{S_{t+1} = 0 | S_t = 0\} &= 1, \\
\mathbf{P}\{S_{t+1} = n | S_t = n\} &= 1.
\end{aligned}$$



Переходные вероятности за t шагов обозначим

$$P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{S_{t+1} = j \,|\, S_0 = i\}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Для блуждания S_t состояния $0, n$ являются поглощающими. Рассматриваются вероятности остановки (ср. [2], [3])

$$q_{i0}^{(n+1)} = \lim_{t\to\infty} P_{i0}(t), \quad p_{in}^{(n+1)} = \lim_{t\to\infty} P_{in}(t)$$

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2024 г.

Теорема. *Вероятности остановки равны*

$$q_{i0}^{(n+1)} = \frac{q_1 \cdots q_i p_{i+1} \cdots p_{n-1} + q_1 \cdots q_{i+1} p_{i+2} \cdots p_{n-1} + \cdots + q_1 q_2 \cdots q_{n-1}}{p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + q_1 p_2 \cdots p_{n-1} + q_1 q_2 p_3 \cdots p_{n-1} + \cdots + q_1 q_2 \cdots q_{n-1}}.$$

Из соображений симметрии имеем

$$p_{in}^{(n+1)} =$$

$$= \frac{p_{n-1} \cdots p_i q_{i-1} \cdots q_1 + p_{n-1} \cdots p_{i-1} q_{i-2} \cdots q_1 + \cdots + p_{n-1} p_{n-2} \cdots p_1}{q_{n-1} q_{n-2} \cdots q_1 + p_{n-1} q_{n-2} \cdots q_1 + p_{n-1} p_{n-2} q_{n-3} \cdots q_1 + \cdots + p_{n-1} p_{n-2} \cdots p_1},$$

очевидно $q_{i0}^{(n+1)} + p_{in}^{(n+1)} = 1$.

В случае $q_i = q$, $p_i = p$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $q + p = 1$, получаем решение «классической задачи о разорении» ([1, гл. XIV, § 2, формула (2.4)]). При $n = 2$ и $n = 3$ приходим к очевидным выражениям для вероятностей остановки.

$S_t, (t = 0, 1, \ldots)$ — цепь Маркова с матрицей $P_{(n+1)\times(n+1)}$ вероятностей перехода за единицу времени; $p_\infty = \lim_{t\to\infty} (P^{\mathrm{T}})^t p_0$ [1], где вектор-столбец p_0 задает начальное распределение, и вектор p_∞ есть предельное распределение вероятностей.

Вычисление вероятностей остановки по формуле теоремы и формуле из теории цепей Маркова выполнены в случае $n = 4$. Имеем

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$q_1 = 0,1, \quad q_2 = 0,5, \quad q_3 = 0,2.$$

Начальным состоянием цепи S_0 служит значение 2, стало быть, $p_0 = (0, 0, 1, 0, 0)$, и $p_\infty = (q_{20}^{(5)}, 0, 0, 0, p_{24}^{(5)})$ — вектор финальных вероятностей.

Теорема дает $q_{20}^{(5)} = 1/9 \approx 0,1111$; предельная формула, при приближении $t = 10$, дает $q_{20}^{(5)} \approx P_{20}(10) \approx 0,1055$.

Подстановка других значений параметров n, q_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $t = 10, 20, 40$, при различных начальных условиях дает близкие значения вероятностей остановки $q_{i0}^{(n+1)}$, при вычислениях двумя способами. Использован онлайн вычислитель www.wolframalpha.com.

Рассмотренную задачу о неоднородном случайном блуждании сформулировал А. В. Калинкин, теорему установил А. В. Мастихин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 528 с.// *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and its Applications. V. I. 3rd ed., Wiley: N. Y. (Hoboken, NJ) – Chichester etc., 1968, 509 p. (Wiley Series in Probablity and Mathematical Statistics.)
2. *Калинкин А. В.* Вероятность остановки на границе случайного блуждания в четверти плоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 452–474.// *Kalinkin A. V.* Absorption probability at the border of a random walk in a quadrant and a branching process with interaction of particles. — Theory Probab. Appl., 2003, v. 47, is. 3, p. 469–487.
3. *Мастихин А. В.* Финальное распределение для марковского процесса эпидемии Гани. — Математические заметки, 2007, т. 82, в. 6, с. 873–884.// *Mastikhin A. V.* Final distribution for Gani epidemic Markov processes. — Math. Notes, 2007, v. 82, is. 6, p. 787–797.

Поступила в редакцию
04.VIII.2024

UDC 531.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Kalinkin A. V., ***Mastikhin A. V.*** (Moscow, Bauman Moscow State Technical University)**. Numerical estimates of the probability of stopping a random walk on a segment.**

Abstract: Two formulas for the probability of stopping at the boundary of a random walk are compared numerically.

Keywords: integer segment, random walk.