ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3.I
2013

Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

БЕЛЯВСКИЙ Г. И., ДАНИЛОВА Н. В.

ПРОЦЕССЫ ЛЕВИ

КРАТКИЙ КУРС[1)]

Содержание

[1)] От Редакции. Эта публикация — журнальная редакция одноименной монографии, издание которой в форме отдельной книги будет осуществлено позднее.

Введение

Интерес к процессам Леви обусловлен, прежде всего, тем, что процессы Леви являются одновременно семимартингалами и однородными марковскими процессами, для которых анализ, с одной стороны, оказывается проще, а с другой стороны, имеет достаточную степень общности. Процессы Леви можно рассматривать как непрерывный аналог случайного блуждания; они доставляют примеры процессов с траекториями, непрерывными справа и имеющими пределы слева. Разрывы траекторий происходят в случайные моменты времени числом не более, чем счетным на любом конечном временном интервале. Важным обстоятельством является то, что в конструкциях процессов применяются распределения с тяжелыми хвостами. К процессам Леви относятся такие важные классы процессов, как броуновское движение, пуассоновский процесс, устойчивые процессы и субординаторы.

Несмотря на то, что основные результаты теории были получены в 30-х годах прошлого столетия, интерес к процессам Леви не ослабевает в связи с их многочисленными приложениями в таких различных областях, как, например, стохастическая финансовая математика и квантовая теория поля. Следует также отметить, что исследователи постоянно получают новые теоретические и прикладные результаты в области моделирования с использованием процессов Леви. Наиболее полное изложение теории процессов Леви представлено в относительно недавних работах J. Bertoin [1], K. I. Sato [2], в «библии» по устойчивым процессам G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu [3]. Аналитические свойства процессов Леви изложены в работах N. Jacob [4, 5], разнообразные приложения процессов Леви можно найти в сборнике под редакцией O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick [6] и работах R. Cont, P. Tankov, B. Øksendal, A. Sulem [7, 8]. Приложениям процессов Леви в финансовой математике посвящены также работы отечественных математиков С. Боярченко, С. Левендорского [9] и О. Кудрявцева [10].

Поведение стохастической системы описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dX_t = U(t, X_t)\,dt + V(t, X_t)\,dN_t$. Большинство работ посвящено исследованию решений этого уравнения (стохастическому исчислению), когда N является броуновским движением или, в более общем случае, непрерывным семимартингалом, см., например, работы I. Karatzas, S. Shreve [11], M. Revuz, D. Yor [12], H. Kunita [13]. Систематическое изложение стохастического исчисления для общих семимартингалов можно найти в работах J. Jacod, A. N. Shiryaev [14], P. Medvegyev [15], P. Protter [16]. На протяжении всей книги в дифференциальном уравнении будут использоваться и сами процессы Леви, и процессы, которые получаются из процессов Леви.

Это позволяет упростить изложение стохастического интегрирования по сравнению с теорией интегрирования по общим семимартингалам. Несмотря на большое количество монографий, посвященных процессам Леви, на русском языке такая литература практически отсутствует. Кроме этого, книга предназначена для первого ознакомления с процессами Леви, поэтому наиболее громоздкие доказательства теорем в ней опущены и приведены ссылки на книги, в которых соответствующие доказательства изложены.

Структура данной книги такова. В первой главе дается определение процесса Леви, приведены основные примеры: винеровский процесс, процесс Пуассона и составной процесс Пуассона. Устанавливается связь процесса Леви и безгранично делимого закона распределения, показывается, что процесс Леви в любой момент времени можно рассматривать как случайное блуждание.

Во второй главе рассматриваются различные классы процессов Леви: гауссовские процессы; процессы с конечной мерой Леви, являющиеся суммой гауссовского процесса и составного процесса Пуассона; процесс, мера Леви которого является взвешенной суммой мер Дирака; устойчивые процессы и субординаторы Леви, в частности, рассматривается субординатор Thorin, подробный анализ которого приведен в работе [19].

В третьей главе рассматриваются субординированные процессы Леви. Основное внимание уделяется субодинированным гауссовским процессам; показано, как при помощи субординации винеровского процесса α-устойчивым субординатором можно получить 2α-устойчивый процесс Леви.

В четвертой главе приводятся основные необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории мартингалов: теорема об остановке, разложение Дуба–Мейера и строго марковское свойство процессов Леви.

Основное содержание пятой главы посвящено разложению Леви–Ито, которое позволяет представить процесс Леви в виде суммы гауссовского процесса Леви, процесса Леви, который является квадратично интегрируемым мартингалом, и составного процесса Пуассона — процесса с ограниченной вариацией. Это разложение затем используется при определении стохастического интеграла по процессу Леви.

В шестой главе дается определение интеграла по винеровскому процессу, предваряющее определение интеграла по процессу Леви. Рассматриваются: процессы Ито и формула Ито; условие Новикова и теорема Гирсанова; изучается представление квадратично интегрируемых мартингалов. В качестве примера выводится формула Блэка–Шоулса, играющая важную роль в финансовой математике.

Интегралу по процессу Леви посвящена седьмая глава. При определении интеграла используются свойства процесса Леви, что позволяет существенно упростить изложение. Приведены примеры процессов, которые получаются в результате интегрирования по процессу Леви, в частности, негауссовский процесс Орнштейна–Уленбека.

В восьмой главе рассматриваются процессы Ито–Леви, формула Ито для процессов Леви, экспоненциальные процессы Леви, преобразование Эшера и приложения экспоненциальных процессов Леви в финансовой математике.

В девятой главе изучаются марковские процессы, дается определение оператора трансляции и инфинитезимального оператора, показывается, что и тот, и другой являются псевдодифференциальными операторами. Выводится общее уравнение для процесса справедливых цен, приводится уравнение для модели Мертона.

В десятой главе приводятся два способа построения процессов Леви. Один из них определяется как конкатенация броуновских мостов и предназначен для построения процессов с конечной мерой Леви. Показано, как при помощи этой конструкции могут быть построены приближенные версии более общих процессов Леви. Другой способ связан с субординацией гауссовского процесса. Устанавливается связь между умеренно устойчивыми процессами и субординированными гауссовскими процессами. Приводится конструкция процесса, у которого «маленькие» скачки имеют устойчивое распределение, а «большие» — экспоненциальное распределение.

В одиннадцатой главе обсуждается дискретизация процесса Леви по временн´ой и фазовой переменным Основная цель раздела заключается в определении приближенной версии процесса, полученной при помощи нормального, пуассоновского и бинарного распределений.

Генераторам траекторий процесса Леви с конечной и бесконечной мерой Леви посвящена двенадцатая глава. Для процесса Леви с бесконечной мерой рассматривается аппроксимация процессом с конечной мерой, субординация и представление процесса Леви посредством ряда.

В тринадцатой главе рассматриваются две модели под управлением процесса Леви. В этих моделях параметры изменяются в случайные моменты времени. В первой модели параметры управляются марковской цепью, не зависящей от процесса, во второй модели параметры изменяются в моменты остановки, зависящие от процесса. Приводятся примеры из стохастической финансовой математики.

Аддитивным процессам посвящена четырнадцатая глава, в которой рассматриваются негауссовский процесс Орнштейна–Уленбека и популярная модель Васичека под управлением процесса Леви. Кроме того, при помощи аддитивных процессов проводится построение стационарных в широком смысле последовательностей и последовательностей со стационарными в широком смысле приращениями, в том числе фрактальных последовательностей.

В последней главе рассматриваются вычислительные схемы: метод Фурье, метод деревьев и метод Монте-Карло.