ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 1 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
1994

МИХАЙЛОВ В. Г.

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ СУММЫ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ИНДИКАТОРОВ

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — случайные величины, вообще говоря, зависимые, каждая из которых может принимать лишь два значения: 0 и 1. Под X_i можно понимать индикатор некоторого случайного события A_i из набора случайных событий $A_1, \dots, A_n$. По этой причине случайные величины $X_1, \dots, X_n$ называются случайными индикаторами. Рассмотрим случайную величину

$$W = X_1 + \dots + X_n$$

— число осуществившихся событий в наборе $A_1, \dots, A_n$. В предлагаемой работе рассматриваются вопросы точности пуассоновской аппроксимации для распределения случайной величины W. Совместное распределение набора случайных величин $X_1, \dots, X_n$ описывается в терминах графа зависимостей. В этой постановке получены двусторонние оценки для вероятности $\mathbf{P}\{W = 0\}$ и оценки снизу для вероятностей $\mathbf{P}\{W \leqslant m\}$. Последние при малых по сравнению с $\mathbf{E}\,W$ значениях параметра m имеют смысл оценок для вероятностей больших уклонений. Эти оценки для $\mathbf{P}\{W = 0\}$ и $\mathbf{P}\{W \leqslant m\}$ асимптотически точнее оценок, полученных ранее другими методами, в том числе и с помощью известного метода Чена–Стейна.

В работе получены также оценки сверху для вероятностей $\mathbf{P}\{W \leqslant m\}$ и оценки сверху для расстояния по вариации до сопровождающего пуассоновского распределения (также в терминах графа зависимостей). Однако эти оценки уже не имеют заметных преимуществ перед оценками, которые получаются с помощью метода Чена–Стейна.

Кроме этого, в статье рассматриваются вопросы оценки точности при аппроксимации распределения суммы случайных элементов коммутативной полугруппы по сложению распределениями сумм независимых случайных элементов. В своих методах мы следуем работе А. М. Зубкова [1].

§ 1. Введение

Начнем с определений. *Граф зависимостей* Γ для системы случайных величин $X_1, \dots, X_n$ имеет множество вершин $V = \{1, \dots, n\}$, а множество его ребер

$$\mathcal{E} \subseteq \bigl\{\{i,j\},\ i,j \in V\bigr\}$$

таково, что для любых непересекающихся множеств вершин $V_1, V_2 \subseteq V,\ V_1 \cap V_2 = \varnothing$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{E} \cap \bigl\{\{i,j\},\ i \in V_1,\ j \in V_2\bigr\} = \varnothing,$$

системы случайных величин

$$\{X_i,\ i \in V_1\} \quad \text{и} \quad \{X_j,\ j \in V_2\}$$

не зависят друг от друга.

Мы считаем, что в графе Γ присутствуют все «петли» $\{i,i\},\ i \in V$. Это позволит немного упростить обозначения.

Граф зависимостей может быть определен для любой системы случайных величин. При этом он определяется неединственным образом. Например, добавление ребер в граф зависимостей не меняет его основного свойства, а полный граф с петлями можно взять в качестве графа зависимостей для любой системы случайных величин. Минимальный граф зависимостей во многих случаях также определяется неоднозначно. Однако в большинстве интересных случаев (например, для конечно зависимых слагаемых, слагаемых в U-статистиках и т. п.) граф зависимостей строится естественным образом.

Пусть задан набор случайных индикаторов $X_1, \dots, X_n$ с некоторым графом зависимостей Γ. Будем писать $i \sim j$, если вершины i и j соединены ребром в графе Γ. В противном случае будем писать $i \perp j$. Если в множестве D существует такой элемент j, что $i \sim j$, то будем писать $i \sim D$. В противном случае будем писать $i \perp D$.

Положим при $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
R(i_1, \dots, i_m) &= \{i \in V\colon\ i \sim i_k,\ \forall k = 1, \dots, m\},\\
R^0(i_1, \dots, i_m) &= R(i_1, \dots, i_m) \setminus \{i_1, \dots, i_m\},\\
V_0^m &= \{(i_1, \dots, i_m)\colon\ i_1, \dots, i_m \in V,\ i_s \perp i_t\ (s \neq t)\}
\end{aligned}$$

и определим величины

$$\begin{aligned}
A_m &= \sum_{(i_1,\dots,i_m) \in V_0^m} \ \sum_{i \in R(i_1,\dots,i_m)} \mathbf{P}\{X_i = 1\} \prod_{s=1}^{m} \mathbf{P}\{X_{i_s} = 1\},\\
B_m &= \sum_{(i_1,\dots,i_m) \in V_0^m} \ \sum_{i \in R^0(i_1,\dots,i_m)} \mathbf{P}\{X_1 = X_{i_1} = \dots = X_{i_m} = 1\}. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$