

**МИХАЙЛОВ В. Г.**

**ЯВНЫЕ ОЦЕНКИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ  
ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ИНДИКАТОРОВ**

**§ 1. Введение**

Под явными мы понимаем оценки в форме неравенств с явно выписанными константами, позволяющие проводить численное оценивание изучаемых характеристик. Вопрос явного оценивания скорости сходимости в предельных теоремах является одним из центральных в теории вероятностей. Не меньшую роль играет задача явного оценивания в перекрестной комбинаторике. Оба этих направления соприкасаются в задачах оценивания в предельных теоремах для сумм случайных индикаторов. Известно, что одним из наиболее эффективных методов решения перекрестных комбинаторных задач является их сведение к задачам вероятностной комбинаторики. При этом в подавляющем большинстве случаев задача сводится к изучению вероятностных свойств сумм случайных величин, называемых случайными индикаторами и принимающих лишь два значения: 0 и 1.

Поясним этот метод на примере известной задачи о числе  $N_n$  подстановок степени  $n$ , не имеющих неподвижных точек. Воспользуемся теоретико-вероятностной трактовкой этой комбинаторной задачи. Рассмотрим случайную подстановку  $\sigma$ , распределенную равномерно на множестве всех  $n!$  подстановок на множестве  $\{1, \dots, n\}$ . Пусть  $\xi$  — число неподвижных точек случайной подстановки  $\sigma$ . Рассмотрим случайные события  $A_i = \{\sigma_i = i\}$  и случайные величины  $\xi_i$ , определяемые как индикаторы случайных событий  $A_i$ :

$$\xi_i = I\{A_i\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_i = i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n, \tag{1.1}$$

$$N_n = n! \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_n = 0\}. \tag{1.2}$$

Таким образом, вопрос оценивания числа  $N_n$  свелся к оцениванию распределения суммы зависимых случайных индикаторов (1.1).

Использованный прием иногда называется «методом индикаторов». Он позволяет применить теоретико-вероятностные методы при решении типично комбинаторных задач. В данном примере можно воспользоваться известными формулами включения-исключения и неравенствами Бонфферони для числа успехов в зависимых испытаниях и получить как асимптотическую формулу

$$N_n = n!e^{-1}(1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (1.3)$$

так и явную оценку величины  $N_n$ :

$$|N_n - n!e^{-1}| \leq 1/(n+1). \quad (1.4)$$

Подробнее этот вопрос будет рассматриваться в § 3.

Разнообразные приложения метода индикаторов являются причиной неослабевающего интереса к теории суммирования случайных индикаторов. Эта теория зародилась на заре теории вероятностей. Достаточно вспомнить теорему Муавра–Лапласа для схемы Бернулли, представляющей собой простейший вариант системы случайных индикаторов. Схема Бернулли сыграла важную историческую роль в развитии вероятностных методов и к настоящему времени является наиболее изученным объектом теории вероятностей. Однако такое естественное обобщение этой схемы, как введение разных вероятностей для разных испытаний (неоднородная схема Бернулли, или схема Пуассона), приводит к ряду вопросов, еще не решенных исчерпывающим образом. В то же время схема Пуассона представляет заметный практический интерес. В § 2 мы увидим, что она естественным образом возникает при решении ряда комбинаторно-вероятностных задач.

Однако схемы с независимыми индикаторами не могут обеспечить всех потребностей вероятностной комбинаторики. Например, в рассмотренной выше очень простой задаче о числе подстановок без неподвижных точек мы пришли к системе именно зависимых индикаторов. То же самое происходит при решении задач о случайных отображениях, случайных покрытиях, о числе решений случайных уравнений над конечными полями и во многих случаях. В перечисленных задачах, как правило, возникает вопрос о точности пуассоновской аппроксимации для сумм случайных индикаторов. Одним из самых значительных достижений теории вероятности в этом направлении явилось получение явных оценок точности пуассоновской аппроксимации, пригодных для широких классов зависимых случайных индикаторов. Изложению этих результатов посвящены §§ 3, 4, 5 и 6 настоящей работы.

Точность и вычислительная сложность упомянутых оценок, а иногда и принципиальная возможность их применения, сильно зависят от

конкретных свойств изучаемой системы случайных индикаторов. В настоящей работе мы во многих случаях ограничиваемся рассмотрением систем случайных индикаторов с малым числом зависимостей. Именно эти системы возникают в большинстве комбинаторно-вероятностных задач, и именно для этих систем применение упомянутых методов дает наибольший эффект.

Понятие системы с малым числом зависимостей является обобщением понятия системы конечно зависимых случайных величин. Напомним последнее. Пусть  $m$  — некоторое натуральное число. Последовательность случайных величин  $X_1, \dots, X_n$  называется  $m$ -зависимой, если для любого натурального  $t$ ,  $1 \leq t \leq n - m$ , совокупности случайных величин  $\{X_1, \dots, X_t\}$ ,  $\{X_{t+m+1}, \dots, X_n\}$  не зависят друг от друга.

Это понятие широко используется в теории случайных процессов, однако для комбинаторных задач оно малопрочно. Здесь обычно нет естественного линейного порядка слагаемых, определяющего степень их зависимости между собой.

Понятие системы с малым числом зависимостей вводится с помощью графа зависимостей. Системе случайных величин  $X_i$ ,  $i \in V$ , можно сопоставить граф  $\Gamma$  с множеством вершин  $V$  и таким множеством ребер  $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ , что для любых непересекающихся подмножеств  $V_1, V_2 \subseteq V$  вершин графа  $\Gamma$ , не связанных ребрами (т.е. удовлетворяющих условиям  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  и  $(V_1 \times V_2) \cap \mathcal{E} = \emptyset$ ) системы случайных величин  $\{X_i, i \in V_1\}$  и  $\{X_i, i \in V_2\}$  не зависят друг от друга. Граф  $\Gamma$  с указанным свойством называется графом зависимостей системы случайных величин  $\{X_i, i \in V\}$ .

Граф зависимостей может быть определен для любой системы случайных величин, но при этом он определяется не единственным образом. Например, в качестве графа зависимостей любой системы случайных величин можно взять полный граф на  $V$ . Следует отметить, что и минимальный граф зависимостей в большинстве случаев также определяется неоднозначно.

Описание системы случайных величин с помощью графа зависимостей содержит далеко не всю информацию о распределении системы и оказывается полезным, лишь когда граф зависимостей содержит сравнительно мало ребер. Мы не будем конкретизировать степень этой малости; здесь все зависит от рассматриваемой задачи. Примером системы с малым числом зависимостей является последовательность конечно зависимых случайных величин. В этом случае множество ребер графа зависимостей может быть выбрано по правилу:

$$\mathcal{E} = \{(i, j): |i - j| \leq m\}.$$

Малость числа зависимостей в этом примере выражается в том, что при большой длине  $n$  последовательности в графе имеется лишь  $O(mn)$  ребер, а не  $\binom{n}{2}$  ребер, как в полном графе.

Важным частным случаем системы с малым числом зависимостей являются системы вида

$$\{\xi_{i_1, \dots, i_r} = f_{i_1, \dots, i_r}(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}), i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n\} \quad (1.5)$$

при независимых случайных величинах  $X_1, \dots, X_n$ . Тогда естественно положить

$$\mathcal{E} = \{(i, j), i = (i_1, \dots, i_r), j = (j_1, \dots, j_r): \{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_r\} \neq \emptyset\},$$

и граф  $\Gamma$  будет графом зависимостей.

Суммы случайных величин вида (1.5) часто используются в математической статистике. Это так называемые  $V$ -статистики и  $U$ -статистики. В первом случае суммирование ведется по всем наборам индексов из (1.5), а во втором — лишь по  $i_1, \dots, i_r$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ . Если функции  $f_{i_1, \dots, i_r}$  существенно зависят от своих индексов, то статистики называются неоднородными.

Проиллюстрируем введенные понятия на следующем примере. Пусть  $N_{ns}$  — число последовательностей длины  $n$  из нулей и единиц, в которых все комбинации  $s$  подряд идущих чисел ( $s$ -цепочки) различны. Опять воспользуемся методом индикаторов. Рассмотрим последовательность Бернулли  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с вероятностью  $p = \mathbf{P}\{X_i = 1\} = 1/2$  и функционал

$$W_{ns} = \sum_{1 \leq i < j \leq n-s+1} I\{(X_i, \dots, X_{i+s-1}) = (X_j, \dots, X_{j+s-1})\}. \quad (1.6)$$

Очевидно, что

$$N_{ns} = 2^n \mathbf{P}\{W_{ns} = 0\},$$

а случайная величина  $W_{ns}$  является неоднородной индикаторной (т.е. с ядрами, принимающими лишь два значения: 0 и 1)  $V$ -статистикой от последовательности Бернулли. Таким образом, задача о числе последовательностей указанного вида свелась к изучению распределения некоторой индикаторной  $V$ -статистики от последовательности независимых случайных величин, т.е. к вопросам суммирования случайных индикаторов с малым числом зависимостей.

Перейдем к описанию расположения материала в статье. В § 2 рассматривается неоднородная схема Бернулли (схема Пуассона). Здесь приводятся полный список предельных теорем для числа успехов и явные оценки точности как в случаях пуассоновской и нормальной аппроксимации, так и при использовании асимптотического разложения. Четыре следующих параграфа статьи посвящены изложению различных методов оценивания точности пуассоновской аппроксимации для сумм зависимых случайных индикаторов. В § 3, имеющем скорее методический интерес, рассматривается метод моментов. К сожалению, в большинстве задач этот метод не дает правильных по порядку оценок точности

пуассоновской аппроксимации. В § 4 рассматривается метод одного вероятностного пространства, при котором изучаемая система случайных индикаторов задается на одном вероятностном пространстве с сопровождающей системой независимых случайных индикаторов. В § 5 излагается метод Зубкова, особенно удобный при решении так называемых обратных задач, когда вопрос сводится к оцениванию вероятности того, что сумма случайных индикаторов равна нулю. В этом случае предполагается, что изучаемые величины являются неоднородными индикаторными  $V$ -статистиками. В § 6 излагается знаменитый метод Чена–Стейна. Проигрывая по точности оценивания вероятности  $\mathbf{P}\{W = 0\}$  методу Зубкова, этот метод дает лучшие и очень простые по форме оценки для расстояния по вариации до сопровождающего пуассоновского распределения. Будучи применим в очень большом числе случаев, метод Чена–Стейна наиболее эффективен для систем случайных величин с малым числом зависимостей. Вопрос о явном оценивании точности пуассоновской аппроксимации неизбежно приводит к вопросам оценивания точности нормальной аппроксимации. Последние рассматриваются в § 7 для сумм случайных величин с малым числом зависимостей. Предположение о том, что слагаемые являются индикаторами, при этом не используется.

В основном статья имеет обзорный характер. Однако материал §§ 3, 4, 6 излагается с достаточно полными рассуждениями. Это особенно важно для метода Чена–Стейна, слабо освещенного в отечественной литературе. Следует подчеркнуть, что статья не претендует на полноту охвата материала. Что касается метода Чена–Стейна, то для более подробного знакомства с ним следует обратиться к монографии [34] и к обзорной статье [28].

Автор признателен А. М. Зубкову за ряд полезных замечаний.