

НОРБЕРГ Р.
СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
В АКТУАРНОЙ НАУКЕ*

Настоящая статья обращается к классу задач страховой математики, которые сводятся к отысканию условных математических ожиданий некоторых функционалов от некоторых случайных процессов. На примерах показывается, как современное стохастическое исчисление помогает обобщить существующие результаты на модели большей сложности, которые лучше отвечают различным ситуациям реальной жизни, и предлагается единая методология. Тот же набор инструментов используется, чтобы очертить границы, на первый взгляд, не связанных объектов из традиционно не общающихся между собой подобластей актуарной математики, включая моменты первого и высших порядков для текущих значений в страховании жизни, распределение общей суммы исков в страховании, не связанном со страхованием жизни, и вероятность разорения в теории страхового риска.

§ 1. Введение

1 А. Общие сведения. Актуарная наука ассимилировала зачатки стохастического исчисления уже около столетия назад. Дифференциальные уравнения для резерва полиса страхования жизни были получены Тилем (Thiele) еще в 1875 году (см. [10]), а для вероятности возможного разорения страховой компании — Лундбергом (Lundberg) в 1903 (см. [5]) — в то время понятие стохастического процесса еще не было точно определено. Теория стохастического исчисления, которая свое развитие получила, в основном, в последние полвека, дает возможность унифицированного подхода к широкому классу задач, связанных с предсказанием поведения в будущем страховых договора, портфеля или предприятия на основе их прошлой истории. Подходящие версии теоремы Дуба о свободном выборе и цепное правило для семимартингалов (обобщенная формула Ито) вместе с разложением Дуба–Мейера и некоторые элементарные факты из теории мартингалов дают интегральные, дифференциальные

или интегро-дифференциальные уравнения для распределений вероятностей и для моментов текущих значений, для вероятности разорения и других функций, имеющих практический интерес. Подход работает в достаточно сложных моделях, способных отвечать реальным системам, минимизируя как риск ответственности, так и риск активов. Его потенциал демонстрируется на примерах из страхования жизни, страхования, не связанного со страхованием жизни, из теории страхового риска и из финансовой экономики, и открытие автора при этом состоит в том, что актуарии всех родов — первого, второго и третьего (жизнь, не жизнь, финансы) — объединятся в революции стохастического исчисления, а границы, разделяющие их, будут стерты.

1 В. План статьи. Основные концепции и выводы актуарной науки представлены и кратко обсуждаются в § 2. В § 3 цитируются и развиваются некоторые недавние результаты, касающиеся моментов и распределений вероятностей текущих значений в марковской модели (марковская цепь с непрерывным временем), пригодной для описания задач страхования жизни. В § 4 мы занимаемся вероятностью разорения за конечное или бесконечное время в моделях с выплатами, управляемыми некоторым маркированным точечным процессом или диффузионным процессом, а также с процентами обоих типов. Как частный случай, появляется распределение общей суммы сложных пуассоновских исков. Мы в деталях прорабатываем доказательства для некоторых простых частных случаев в § 3 и § 4, заодно рекламируя используемую нами технику, которая хорошо работает для всего круга изучаемых здесь задач. В § 5 мы предлагаем немного поразмышлять над выбором модели и, в частности, приводим некоторые аспекты проблемы «ограниченная вариация против диффузии». Основные определения и утверждения из теории случайных процессов вынесены в Приложение, и они будут везде далее свободно использоваться, часто без специальных ссылок.