ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 3 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
1996

ИВЧЕНКО Г.И., МЕДВЕДЕВ Ю.И.

ПРОЦЕСС ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ЗАПОЛНЕНИЯ ЯЧЕЕК В СХЕМЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ КАК МАРКОВСКАЯ ЦЕПЬ

Рассматривается класс марковских схем размещения частиц по N ячейкам: последовательность $\{\xi_N(n),\ n \geqslant 0\}$ состояний системы, где $\xi_N(n)$ есть число занятых ячеек после размещения n частиц, является простой однородной цепью Маркова с переходами лишь вида $j \to j$ и $j \to j+1$. Методами конечных цепей Маркова находятся общие переходные вероятности этой цепи. Вводится двойственная конструкция процесса ожидания, и с ее помощью проводится асимптотический анализ распределения цепи при $N \to \infty$. Обсуждаются также вопросы статистического оценивания неизвестных параметров цепи.

1. Введение

Хорошо известно (см., например, [1, пример 2, д, гл. XVI]), что в классической задаче о размещении (частицы размещаются по N ячейкам последовательно, независимо и равновероятно) последовательность $\{\xi_N(n),\ n=0,1,\ldots\}$, где $\xi_N(n)$ есть число занятых ячеек после размещения n частиц, является простой однородной цепью Маркова специфической структуры. Именно, состояниями цепи $\{\xi_N(n),\ n=0,1,\ldots\}$ являются $0,1,\ldots,N$, в ней возможны лишь переходы вида $j \to j$ и $j \to j+1$, и N является поглощающим состоянием. Положим

$$\begin{aligned} p_j &= \mathbf{P}\left\{\xi_N(n+1)=j+1 \,\middle|\, \xi_N(n)=j\right\},\\ q_j &= 1-p_j = \mathbf{P}\left\{\xi_N(n+1)=j \,\middle|\, \xi_N(n)=j\right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

тогда в классической схеме $q_j = j/N,\ j=0,1,\ldots,N$. Что касается начального распределения этой цепи, то обычно в задачах о размещениях предполагается, что в начальный момент все ячейки пусты ($\xi_N(0) = 0$), т.е. начальное распределение определяется вероятностями $p_0^{(0)}=1$, $p_k^{(0)}=0$ при $1 \leqslant k \leqslant N$. Это предположение не является существенным; в общем случае можно рассматривать цепь с произвольным начальным распределением $(p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_N^{(0)})$.

Тем самым некоторые свойства классической схемы размещения могут быть исследованы хорошо разработанными методами конечных цепей Маркова, что и продемонстрировано в [1] на примере вычисления n-шаговых переходных вероятностей $p_{jk}^{(n)} = \mathbf{P}\{\xi_N(n) = k \,|\, \xi_N(0) = j\}$, $k \geqslant j$.

Марковская модель (1) (при соответствующих конкретизациях параметров $\{q_j\}$) описывает ряд других схем размещения, отличающихся от классической схемы в различных аспектах. Одним из примеров таких схем является рассматривавшаяся в работах авторов [2], [3] *схема размещения с отражением.* В этой схеме каждая частица, бросаемая с равной вероятностью в N ячеек независимо от других частиц, попав в уже занятую ячейку, остается в ней лишь с некоторой вероятностью p и отражается от нее с вероятностью $q = 1 - p$; в последнем случае процесс размещения частицы повторяется заново до тех пор, пока частица либо не попадет в пустую ячейку (и тогда она остается в ней с вероятностью 1), либо не будет захвачена какой-нибудь уже занятой ячейкой (классическая схема соответствует значению $p = 1$). Как отмечено в [3], эта схема удовлетворяет модели (1) с $q_j = pj/(N - qj)$, $j = 0, \ldots, N$.

В модель (1) укладывается также неоднократно рассматривавшаяся (см. [4], [6], [7]) *схема с исчезновением частиц*, когда в классической схеме дополнительно предполагается, что каждая бросаемая частица может исчезнуть (не попасть ни в какую ячейку или ни в одну из ячеек выделенной группы) с некоторой вероятностью β. В этом случае, как легко видеть, в (1)

$$q_j = \frac{j}{N} + \frac{N-j}{N}\beta = \beta + \frac{(1-\beta)j}{N}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N.$$

В качестве еще одного примера рассмотрим схему зависимых размещений, в которой очередная размещаемая частица попадает в ту же ячейку, что и предшествующая ей частица, с некоторой вероятностью p, а в любую из $N - 1$ остальных ячеек с одинаковой вероятностью $a = q/(N - 1)$, $q = 1 - p$. Будем говорить о такой схеме как о *схеме размещения с памятью.* Если $p > 1/N$, то имеет место эффект притяжения, а при $p < 1/N$ — эффект отталкивания; классическая схема соответствует здесь значению $p = 1/N$. Легко видеть, что в данном случае мы имеем модель (1) с $q_0 = 0$ и

$$q_j = p + (j-1)a = \big((N-j)p + j - 1\big)/(N-1), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

В эту схему хорошо укладываются процессы переходов в последовательности множеств решений $\xi_{m^N}(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательности A_n систем случайных линейных уравнений с N неизвестными над кольцом вычетов по $\operatorname{mod} m$, где соседние системы отличаются друг от друга одним уравнением (или несколькими уравнениями).

Приведенные примеры (список которых может быть продолжен) делают оправданным рассмотрение модели (1) в общем случае, без конкретизации вида параметров $\{q_j\}$, что и составляет предмет данной работы. Некоторые точные результаты для этой модели (например, вид общих переходных вероятностей) могут быть получены стандартными методами конечных цепей Маркова аналогично тому, как это было сделано для классической схемы в [1] и для схемы с отражением в [3]. Выводу формулы для переходных вероятностей $p_{jk}^{(n)}$ посвящен раздел 2 работы.

Особый интерес в схемах размещений представляют асимптотические соотношения, когда число ячеек N стремится к ∞. В теории конечных цепей Маркова отсутствуют общие методы асимптотического анализа, пригодные для таких ситуаций, однако специфика структуры рассматриваемой цепи позволяет провести достаточно полный асимптотический анализ ее распределений. Для этого в разделе 3 вводится двойственный к цепи процесс ожидания, который представляет собой процесс накапливающихся сумм независимых слагаемых и, следовательно, имеет весьма прозрачную структуру. Исследование асимптотических свойств процесса ожидания проводится уже стандартными методами, чему посвящен раздел 4. В разделе 5 обращением предельных теорем для процесса ожидания получаются асимптотические (при $N \to \infty$) результаты для исходной цепи $\{\xi_N(n),\, n \geqslant 0\}$. Наконец, раздел 6 посвящен вопросам статистического оценивания неизвестных параметров цепи по наблюдениям ее траекторий.