

ШЕПАРД Н.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛЕЙ ТИПА ARCH И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ

Содержание

1. Введение.	765
1.1. Эмпирически стилизованные факты	765
1.2. Оценка условных активов	768
1.3. Классификация моделей волатильности	770
2. ARCH.	773
2.1. Оценивание	774
2.2. Отличные от нормальных условные плотности	776
2.3. Проверка гипотез в ARCH.	776
2.4. Прогнозирование	777
2.5. Обобщения ARCH.	777
2.6. Простые примеры из практики.	783
3. Стохастическая волатильность.	786
3.1. Основные свойства	787
3.2. Оценивание	788
3.3. Метод Монте-Карло для цепей Маркова	792
3.4. Обобщения SV-моделей	801
3.5. Простые примеры реальных приложений.	802
4. Многомерные модели.	805
4.1. Многомерная модель ARCH	806
4.2. Многомерный доход (доход от портфеля)	806
4.3. Факторные модели ARCH	808
4.4. Ненаблюдаемые ARCH	808
4.5. Многомерная SV-модель	809
4.6. Многомерная факторная SV-модель	809
5. Оценка опционов в условиях меняющейся волатильности	810
5.1. Стохастическая волатильность.	810
5.2. ARCH-моделирование	811
5.3. Применение моделей волатильности	812

Shephard N. Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility. — В кн: Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields. Ed. by D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen, 1996, p. 1–55. Publisher: Chapman & Hall, 1996 г.

© Neil Shephard, 1996 г.

© Перевод на русский язык с разрешения владельца прав. Научное издательство «ТВП», 1996 г.

6. Модели с непрерывным временем.	813
6.1. Непосредственное оценивание	814
6.2. Косвенное оценивание	814
7. Заключительные замечания	815
8. Дополнение	816
8.1. Пространство состояний в гауссовой форме.	816
8.2. Фильтр Калмана	816
8.3. Симуляционное сглаживание.	817
8.4. Аналитическое сглаживание.	818
9. Программы для вычислений и базы данных.	818
Благодарности	818
Список литературы	819

1. Введение

В последние десять лет произошел настоящий взрыв интереса исследователей к классу моделей временных рядов, в которых учитываются изменения дисперсии и ковариаций, — так называемым *моделям волатильности*. Можно указать две основные причины такой активности. Во-первых, растущее понимание того факта, что большинство аспектов современной теории финансов непосредственно связано с волатильностью, породило потребность в разработке эмпирически приемлемых моделей для проверки, применения и углубления теоретических результатов. Во-вторых, модели волатильности представляют собой прекрасную испытательную площадку при разработке новых нелинейных и/или негауссовских методов обработки временных рядов.

По моделям волатильности имеется обширная литература, и было бы невозможно дать в одной главе исчерпывающее изложение этого материала. Вместо этого я хотел бы здесь обсудить некоторые из наиболее важных идей. При этом будут рассматриваться простейшие варианты используемых в литературе методов и моделей, а по вопросам их обобщения и условий регулярности будут даваться ссылки на соответствующие источники. Сначала мы рассмотрим две причины, вызвавшие появление моделей волатильности: эмпирическую стилизацию фактов и задачу оценки условных активов. В разделе 4 изучаются многомерные модели, которые играют важную роль в анализе доходности портфеля.

1.1. Эмпирически стилизованные факты. В большей части этой главы мы будем работать с двумя примерами финансовых временных рядов. Первый из них — это двумерный ряд ежедневных обменных курсов японской йены и немецкой марки к фунту стерлингов, он охватывает временной промежуток от 1 января 1986 г. до 12 апреля 1994 г. —

всего 2160 наблюдений. Второй — двумерный ряд ежедневных показателей индексов FTSE 100 и Nikkei 500 — рыночных индексов Лондонского и Токийского фондовых рынков. Этот ряд охватывает промежуток с 2 апреля 1986 г. до 6 мая 1994 г. — всего 2113 наблюдений.

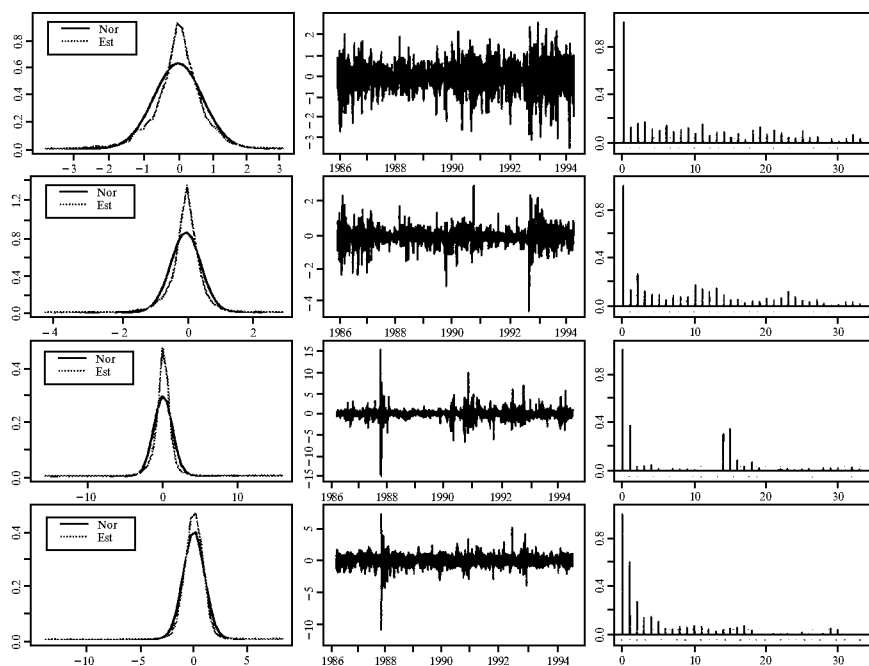


Рис. 1. Ежедневный доход по четырем финансовым активам. Сверху вниз: йена, немецкая марка, Nikkei 500, FTSE 100. Показаны: непараметрическая оценка плотности и ее нормальное приближение, временной ряд доходов и коррелограмма для квадратов его значений

Везде далее мы будем рассматривать сложный (т.е. вычисленный по формуле сложных процентов — *прим. перев.*) доход, соответствующий временному ряду $y_t = 100 \log(x_t/x_{t-1})$, где x_t — цена основного актива. На рис. 1 показаны некоторые общие характеристики двух временных рядов. Приводится оценка плотности (с использованием по умолчанию опции S-Plus) безусловного распределения y_t вместе с ее приближением посредством нормального распределения. Видно, что распределение y_t имеет тяжелые хвосты. Это подтверждается данными табл. 1, где приведены оценки для стандартного четвертого момента. Для всех распределений, кроме японской йены, эти моменты очень велики.

Никаких явных форм несимметрии у безусловной плотности не видно. Коррелограмма для y_t оказалась почти нулевой и поэтому на рисунке не приведена. Далее, изображены временные ряды для y_t в исходном ви-

де. Глядя на картинку, можно сделать вывод о присутствии кластеров волатильности: периоды с большими ежедневными скачками чередуются с периодами стабильности. Это подтверждается при рассмотрении коррелограммы для y_t^2 и соответствующей статистики Бокса–Льюнга (см. табл. 1), которая указывает на значительные корреляции, существующие для довольно длинных временных лагов. На этом основании можно сделать предположение, что ряд y_t^2 ведет себя приблизительно как процесс ARMA(1,1), ибо простой AR-процесс не смог бы сочетать в себе низкую корреляцию и наличие скачков. Наконец, довольно очевидно, что и для обменных курсов, и для показателей фондового рынка имеют место периоды высокой волатильности, причем сильные изменения курса одной валюты сопровождаются сильными изменениями для другой. Это говорит о том, что здесь потребуются многомерные модели.

Таблица 1. Итоговые статистики для рядов ежедневных доходов, представленных на рис. 1. Через BL обозначена статистика Бокса–Льюнга, вычисленная для квадратов с 30 лагами. Если бы в ряду квадратов отсутствовала сериальная зависимость, то значение этого показателя было бы примерно 30. Символом K обозначен стандартный 4-й момент для y_t . В случае нормального распределения K был бы примерно равен 3

	BL	K
Японская йена	563	5.29
Немецкая марка	638	36.2
Индекс Nikkei 500	828	36.2
Индекс FTSE 100	1375	28.1

Причины изменения волатильности.

Хотелось бы иметь какое-то объяснение для изменений уровня волатильности. Один возможный подход состоит в том, чтобы считать изменение цены за один день результатом некоторого (случайного) числа ее изменений в течение дня, вызванных поступающей новой информацией. Тогда $y_t = \sum_{i=1}^{n_t} x_{it}$, где x_{it} — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины, а n_t — некоторый пуассоновский процесс. Модели этого типа имеют давнюю историю, восходящую к работе Кларка [32]. В данной работе мы предполагаем, что процесс n_t не зависит от времени, и тогда тем же свойством будет обладать и y_t . Модель тривиальным образом обобщается на случай n_t , зависящего от времени, что будет приводить к кластерам волатильности. Получающиеся при этом эконометрические результаты оказываются довольно сложными (см. [162]).

Наиболее интересными с точки зрения эконометрики являются моде-

ли, в которых учитывается интерпретация этой поступающей информации, и где описываются также объемы сделок. Такие совместные модели объема (см. также [67]) и волатильности были предметом рассмотрения в работе [74], где использовалась упрощенная модель, и в работе [1]. Эта область очень интересна, хотя и мало исследована.

1.2. Оценка условных активов. Предположим, что цена S некоторой ценной бумаги меняется во времени в соответствии с законом геометрического случайного блуждания $dS = \mu S dt + \sigma S dz$, так что $d \log S = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma dz$. Могут существовать ценные бумаги, цена которых (c) является функцией цены S некоторой другой ценной бумаги (основного актива), лежащей в основе контракта. Экономисты называют такие бумаги *условными* или *производными*. Хорошим введением в эту тематику могут служить книги Ингерсолла [109] и Халла [107]. Примером условного актива является *опцион* — контракт, дающий его владельцу право, но не обязательство, совершить в будущем сделку с основным активом по условленной цене. Так, например, владелец опциона колл европейского типа имеет право купить основной актив по фиксированной цене K в день исполнения опциона $T + v$. В частности, цена исполнения K может быть равна $S(T)$, т. е. цене актива на данный момент (здесь зависимость S от времени указана явно). В этом частном случае опцион называется *at-the-money опционом* или *опционом без выигрыша*. Стоимость европейского опциона колл в момент исполнения будет равна

$$c(T + v) = \max \{S(T + v) - K, 0\}. \quad (1)$$

Уравнение (1) дает значение для цены опциона в момент $T + v$, однако покупается он в момент T , так что его продажную цену еще нужно определить. Самый простой подход состоит в том, чтобы вычислить дисконтированную ожидаемую стоимость опциона

$$\exp(-rv) \mathbf{E}_{S(T+v)|S(T)} \max \{S(T + v) - K, 0\},$$

где через r обозначена безрисковая процентная ставка. При этом, однако, не учитывается то обстоятельство, что трейдеры ожидают от рискованных активов более высокого дохода, чем от безрисковых, — к этому вопросу мы вернемся в разделе 4. Следовательно, рыночная оценка финансовых активов, как правило, не определяется по их ожидаемой цене. Это наводит на мысль о том, что при оценке опционов следовало бы ввести функцию полезности, описывающую связь между повышенным доходом и риском.

Оказывается, что этого дополнительного усложнения можно избежать, воспользовавшись некоторыми свойствами случайного блуждания и сделав предположения о непрерывности торговли и об отсутствии операционных расходов. В сказанном можно убедиться, если рассмотреть портфель стоимостью π , составленный из основного актива в количестве

θ и взятого в долг одного условного актива c . Стоимость такого портфеля, в соответствии с леммой Ито, будет меняться во времени согласно уравнению

$$\begin{aligned} d\pi &= \theta dS - dc \\ &= \theta(\mu S dt + \sigma S dz) - \left(c_s \mu S + c_t + \frac{1}{2} c_{ss} \sigma^2 S^2\right) dt - c_s \sigma S dz \\ &= (\theta - c_s)(\mu S dt + \sigma S dz) - \left(c_t + \frac{1}{2} c_{ss} \sigma^2 S^2\right) dt, \end{aligned}$$

где $c_t = \partial c / \partial t$ и $c_s = \partial c / \partial S$. Выбирая в каждый момент времени θ равным c_s , инвестор добьется того, что $d\pi$ все время будет безрисковым, так как зависимость от случайной составляющей dz устранена. Этот результат, т. е. тот факт, что построенное указанным образом $d\pi$ является детерминированной функцией времени, принадлежит Блэку и Шоулсу [12]. Для того чтобы такой портфель все время оставался безрисковым, он нуждается в непрерывной корректировке — отсюда требование об отсутствии расходов на совершение сделок.

Коль скоро данный портфель является безрисковым, то доход по нему должен совпадать с безрисковой ставкой r — иначе у трейдеров появилась бы возможность арбитража, т. е. получения мгновенной прибыли без риска. В качестве безрисковой ставки можно взять ставку дохода по краткосрочным государственным облигациям. Таким образом, стоимость безрискового портфеля меняется так:

$$d\pi = r\pi dt = r(c_s S - c) dt = -\left(c_t + \frac{1}{2} c_{ss} \sigma^2 S^2\right) dt$$

(в силу безрисковости $\pi = c_s S$). Отсюда следует, что стоимость условного актива подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению

$$c_t + \frac{1}{2} c_{ss} \sigma^2 S^2 + r c_s S = r c \quad \text{с конечным условием } c = \max(S - K, 0).$$

Это уравнение имеет удивительно простой вид. В частности, оно не зависит от μ и, тем самым, от склонности трейдеров к риску. Следовательно, мы можем решать его в предположении о нейтральности к риску. В таком случае мы можем считать, что изменения цены основного актива подчинены другому варианту случайного блуждания, со средним rS^* и дисперсией $\sigma^2 S^{*2}$: $dS^* = rS^* dt + \sigma S^* dz$. Это так называемый процесс, *нейтральный к риску* (см. [107, р. 221–222]). Учитывая логарифмически-нормальный характер блуждания, имеем:

$$\log S^*(T + v) \mid \log S(T) \sim N\{\log S(T) + (r - \sigma^2/2)v, \sigma^2 v\}.$$

Из свойства логнормальности, используя мгновенную дисперсию σ^2 , мы немедленно получаем формулу Блэка–Шоулса для цены опциона за вре-

мя v до исполнения:

$$bs_v(\sigma^2) = \exp(-rv) \mathbf{E} \left[\max \{ S^*(T+v) - K, 0 \} \mid S(T) \right]$$

или

$$bs_v(\sigma^2) = S(T) \Phi(d) - K \exp(-rv) \Phi(d - \sigma\sqrt{v}), \quad (2)$$

где

$$d = \frac{\log\{S(T)/K\} + (r + \sigma^2/2)v}{\sigma\sqrt{v}}. \quad (3)$$

Здесь v и K определяются условиями контракта, $S(T)$ и r известны из наблюдений, и неизвестным остается только σ^2 . Фактически, цена опционов дает оценку для волатильности. Как и в большинстве других задач финансовой теории, именно волатильность, а не ожидаемое среднее значение, играет здесь ключевую роль.

Непосредственно видны два способа использовать формулу (2) на практике. Первый состоит в том, чтобы сначала оценить σ^2 , а затем вычислить цену опциона. Во втором варианте мы, зная реальные цены опционов, находим по ним значение σ^2 . Этот второй метод называется *оценкой подразумеваемой*, или *внутренней, волатильности*. Современное изложение данного вопроса можно найти в [174].

Недостатком всего проделанного анализа является исходное предположение о том, что доход по основному активу изменяется в соответствии с геометрическим случайным блужданием. Рис. 1 показывает, что такое предположение является весьма натянутым, а это, в свою очередь, означает, что формула (2) может оказаться плохой основой для определения цены опционов. Понимание этого факта породило теоретические исследования по оценке опционов в условиях переменных режимов волатильности. Наиболее важной в этой области является работа Халла и Уайта [108]. Позже мы к ней еще вернемся.

1.3. Классификация моделей волатильности. Существует много моделей с переменной дисперсией и ковариациями. Следуя Коксу [33], удобно будет разбить их на две концептуальные категории: модели, *управляемые наблюдениями* (или данными), и модели, *управляемые параметрами*. Для удобства я буду рассматривать оба подхода в рамках строго определенной параметрической схемы, когда

$$y_t \mid z_t \sim \mathcal{N}(\mu_t, \sigma_t^2).$$

Чтобы упростить изложение, мы часто будем полагать μ_t равным нулю, — этот аспект модели для нас не является главным. В моделях, управляемых данными, z_t полагается функцией от предшествующих значений y_t . Первый пример модели такого рода был введен в работе Энгла [53] по авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH = Autoregressive Conditional Heteroscedasticity). В ней предполагалось,

что дисперсия является линейной функцией квадратов предшествующих значений наблюдаемой величины:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p y_{t-p}^2,$$

так что модель прогнозирует плотность на один шаг вперед:

$$y_t | Y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2),$$

где Y_{t-1} — совокупность наблюдений вплоть до момента $t-1$. Тем самым дисперсия в настоящий момент может зависеть от разброса предыдущих наблюдений.

Модели, основанные на явном прогнозе плотностей на шаг вперед, возникают неизбежным образом, и причин этому, по меньшей мере, три. Во-первых, со статистической точки зрения, правдоподобие достигается комбинированием этих плотностей через разложение прогноза. Это означает, что оценка и проверка гипотез производятся просто, по крайней мере, в принципе. Во-вторых, и это важно с экономической точки зрения, финансовая теория часто ограничивается подходом «на один шаг вперед», несмотря на то, что она имеет дело с данными, порождаемыми экономическими агентами, а не специалистами по эконометрике. Третья причина успеха моделей, управляемых данными, заключается в том, что они во многом аналогичны хорошо себя зарекомендовавшим авторегрессионным моделям и моделям скользящих средних, которые широко применяются при моделировании с меняющимися средними значениями. Поэтому ряд методов, разработанных для таких моделей, может быть использован и в новых моделях. Моделям ARCH в эконометрической литературе уделяется очень большое внимание. Обзоры по этой теме представлены в работах [16], [18], [7], [42]. В книге [54] собрано большое количество ранее опубликованных работ по ARCH.

В моделях, управляемых параметрами, или моделях пространства-состояний предполагается, что z_t является функцией некоторой ненаблюдаемой (скрытой) величины. В качестве простого примера можно привести модель логнормальной стохастической дисперсии или волатильности (SV), предложенную Тэйлором [163]:

$$y_t | h_t \sim \mathcal{N}\{0, \exp(h_t)\}, \quad h_{t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 h_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\eta^2).$$

Здесь NID означает, что величины распределены нормально и независимы. Лог-волатильность h_t ненаблюдаема (по крайней мере, для эконометриста), но может быть оценена по данным наблюдений. Такие модели имеют много общего с гауссовскими моделями пространства-состояний, которые были рассмотрены Калманом [112] и получили известность после работ Харрисона и Стевенса [90] и Веста и Харрисона [168]. Применительно к эконометрике модели этого типа рассматривались в работе Харви [91].

К сожалению, в отличие от моделей среднего, которые укладываются в гауссовскую схему пространства-состояний, почти во всех управляемых параметрами моделях волатильности нет аналитического вида для одношагового прогноза плотности $y_t | Y_{t-1}$. Поэтому, чтобы работать с такими моделями, нужно или строить приближения к ним, или использовать мощные численные методы. Пожалуй, здесь есть лишь одно небольшое исключение: стохастические модели волатильности с аналитическими фильтрующими алгоритмами. Шепард [154], следуя более ранним работам по различным негауссовским моделям (см. [159], [94]), предложил в качестве h_{t+1} брать случайное блуждание, в котором $\exp(\eta_t)$ подчинено некоторому специально подобранному шкалированному бета-распределению. Это дает прогнозируемое на шаг вперед распределение, имеющее некоторые сходства с моделью ARCH. В работе [165] этот результат был обобщен на многомерный случай и использовался для того, чтобы допустить малые изменения матрицы ковариаций для обновляющих компонент векторной авторегрессии. К сожалению, похоже, что нельзя отказаться от предположения о случайном блуждании для h_{t+1} , не теряя при этом свойства сопряженности. Подобная негибкость огорчительна и наводит на мысль о том, что такой подход может быть тупиковым.

Хотя SV-модели труднее поддаются статистической трактовке, чем соответствующие модели, управляемые наблюдениями, имеется ряд серьезных причин для того, чтобы их разрабатывать далее. Как мы увидим далее, свойства таких моделей бывает легче обнаруживать, понимать, работать с ними и обобщать на многомерный случай. Кроме того, они имеют более простые аналоговые представления в непрерывном времени, и это важно, поскольку в современной теории финансов широко используются явления диффузии. В качестве примера приведем работу Халла и Уайта [108], где рассматривается логнормальная SV-модель, в которой для h_{t+1} вместо дискретного по времени AR(1) берется процесс Орнштейна–Уленбека. Обзор ряда ранних работ по SV имеется у Тэйлора [164].

Основные статистические понятия.

Для понимания свойств волатильных моделей важно иметь точные определения основных понятий, относящихся к временным рядам, поскольку (и это нехарактерно для моделирования временных рядов) даже небольшие расхождения в определениях могут существенно повлиять на результат.

- Белый шум (WN = White Noise). Для него $E(y_t) = \mu$, $\text{Var}(y_t) = \sigma^2$ и $\text{cov}(y_t, y_{t+s}) = 0$ для всех $s \neq 0$. Величина μ будет чаще всего полагаться равной нулю. Условие на моменты иногда ставится в более сильной форме: предполагается, что y_t для разных t не просто некоррелированы, но и независимы. Этот вариант будет называться

сильным белым шумом, и н.о.р. представляет собой его частный случай.

- Мартингальная разность (MD = Martingale Difference). Это понятие связано с предыдущим: y_t является MD, если $\mathbf{E}|y_t| < \infty$ и $\mathbf{E}(y_t|Y_{t-1}) = 0$. Все MD имеют нулевое среднее и некоррелированы во времени. Если безусловная дисперсия MD-ряда постоянна по времени, то ряд является белым шумом.
- Стационарность ковариаций. Это является обобщением WN на случай, когда автоковариация может иметь вид $\text{cov}(y_t, y_{t+s}) = \gamma(s)$ для всех t , т.е. мера ковариации наблюдений зависит только от промежутка времени между ними. Через $\text{corr}(y_t, y_{t+s}) = \rho(s) = \gamma(s)/\sigma^2$ обозначается функция автокорреляции.
- Строгая стационарность. Для некоторых моделей оказывается, что моментов не существует, даже при том, что соответствующие безусловные распределения — очень хорошие. Как следствие, особо важную роль будет играть строгая стационарность: $F(y_{t+h}, y_{t+h+1}, \dots, y_{t+h+p}) = F(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+p})$ для всех p и h .