

© Перевод на русский язык с разрешения владельца прав. Научное издательство «ТВП», 1996 г.

PREDSTAWLENIQH POSREDSTWOM SKOLXZQ]IH SREDNIH I W TERMINAH NERAWN  
WESNYH O[IBOK AWTOREGRESSIONNOJ MODELI W WARIANTE MØDELI S KORRE  
CIEJ O[IBOK.

ponqtie kointegracii stalo odnim iz wavnej[ih w \konometrike  
wremennyh r[edovnaq s rabot[14], [9]. w mnogo^islennyh publi  
kaciqh po \konometrike \to ponqtie na[lo [irokie primeneniq k ana  
lizu \konomi^eskih dannyyh specialxnye vypuski vurnala *Word*  
*Bulletin of Economics and Statistics*», 1992, v. 54, № 3, I «*Journal of Pol-  
icy Modelling*», 1992, v. 14, № 3, 4, sodervat bolx[oe koli^estwo, rabot  
gde dany primeneniq i dalxnej[ie razrabotki \to go ~~metoda~~  
dlq razwitiq \toj temy raboty predstavleny w [15], [16], [17], [18],  
[19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68], [69], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76], [77], [78], [79], [80], [81], [82], [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89], [90], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100]. kniga [4] predstavlqet soboj sistemati^eskoe izlovenie \to go  
kruga woprosow

w knige [23] daetsq podrobnyj obzor razli^nyh modelej koite  
gracii kotorye movno opredelitx kak podmodeli wektornoj awto  
gressionnoj modeli. d[eluvda@tsq matemati^eskie swojstva processow  
porovdaemyh modelj. w oprosy ih interpretacii koneqow kni  
ge prowenen statisti^eskij analiz osnovannyj na gaussowskoj  
funkcii prawdopodobiq i sootwetstwu@jej asimptoti^eskoj teorii  
dannaq rabota predstavlqet soboj kratkoe izlovenie metodow i rezul  
tatow [23].

w \tom razdele my wwedem osnovnye opredeleniq i obsudim kl@^e  
wye ponqtia q^anem my s tqto opredelim klass stacionarnyh i  
nestacionarnyh processow. my sobiraemsq issledovaniq  
 $\varepsilon_t$  | beskone^naq w obe storony posledowatelxnostx nezawisimyh odi  
kowo raspredeleni^ (iid) p-mernyh slu^ajnyh wel^@ijih  
nulewoe srednee i kone^nu@ dispersiya. sostoitsq linejnyj -r  
godi^eskij process  $x_t = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \varepsilon_{t-i}$ , gde matricy ko[efficientow  
\kspencialxno ubywajut \to r[ed shoditsq po^ti nawersq  
da sleduet stepennoj r[ed

$$C(z) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i$$

shoditsq dlq  $\|C\| < 1 + \delta$  pri nekotom  $\delta > 0$ . dlq analiza funkcii  
prawdopodobiq nam potrebuetsq dopolnitelxnoe predpolowenie o t  
^to  $\varepsilon$  raspredeleny normalno. dlq asimptoti^eskogo analiza  
\to predpolowenie izli[ne nam nuwno tolxkooby wypolnqlisx  
uslowiq centralxnoj predelxnoj, w prezmyxtate ^ego polu^aetsq  
shodimostx k nekotomomu stohasti^eskomu unizheniu perx  
my wwedem klassy processow (1). celx sostoit w tomoby  
opredelitx klass nestacionarnyh processow kotorye stanowqtsq  
stacionarnymi posle perehoda k raznosu stacionarnyh-pro

CESSA(0), KOTORYE STANOWQTSQ NESTACIONARNYMI POSLE SUMMIROWANIQ  
TEM SAMYM IMITIRUETSQ WZAIMOSWQZX MEVDU SLU^AJNYM BLUVDANIEM I  
EGO PRIRAJENIQMI

o P R E D E L E N I E 1. LINEJNYJ  $p$ -MERNYJ PROCESS

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \varepsilon_{t-i}$$

NAZYWAETSQ *интегрированным* порядка 0, ILI KLASSA  $I(0)$ , ES LI  
 $\sum_{i=0}^{\infty} C_i \neq 0$ .

p R I M E R 1. rASSMOTRIM STACIONARNYJ ODNOMERNYJ AWTOREGRES  
SIONNYJ PROCESS  $= \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$  S  $|\rho| < 1$ . pPROCESS^EWIDNQLQETSQ  
LINEJNYM, TAK KAK  $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$ , A IZ  $\sum_{i=0}^{\infty} C_i = (1 - \rho)^{-1} \neq 0$  SLEDU  
ET, ^TO ON PRINADLEVI KLASSU). sMYSL POSLEDNEGO USLOWIQ W TOM  
^TO NAKOPLENNYEIME@T WID

$$\sum_{i=1}^t Y_i = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \right) \sum_{i=1}^t \varepsilon_i - \frac{\rho}{1-\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i (\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{-i}),$$

I USLOWIE  $\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \neq 0$  GARANTIRUET NESTACIONARNOSTX NAKOPLENNOGO PRO  
CESSA

pRI \TOM, ODNAKO PROCESS  $= Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  OKAZYWAETSQ STACI  
ONARNYM, MO NE PRINADLEVI KLASSU), POSKOLXKU SUMMA KO\FFICIEN  
TOW NE RAWNA N pROSUMMIROWAW \TOT PROCESSIM

$$\sum_{i=1}^t X_i = \sum_{i=1}^t Y_i = Y_t - Y_0,$$

T.E NESTACIONARNYMO ASIMPTOTI^ESKI STACIONARNYJ PROCESS  
BUQ WYPOLNENIQ USLOWIQBY SUMMA KO\FFICIENTOW LINEJNOGO PRO  
CESSA BYLA OTLI^NA OT NULQ GARANTIRUETMO EGO NAKOPLENNYE ZNA  
^ENIQ IME@T INTERESU@IJ NAS TIP NESTACIONARNOSTI

w TO VE WREMQ PROCESSAWLENNYJ IZ KOMPONENTY  $Y_t$ , ESTX  
 $I(0)$ -PROCESSAK KAK SUMMA EGO MATRIC KO\FFICIENTOW NE RAWNA NUL@  
s POMOJX@ PONQTIQ)-PROCESSA MY TEPERX WWEDEM, PONQ  
@JESQ OSNOVNYM W ANALIZE KOINTEGRIROWANIE PORQDKA  
ILI KLASSAI(1)-PROCESS

o P R E D E L E N I E 2.  $p$ -MERNYJ SLU^AJNYJ PROCESSNAZYWAET  
SQ *интегрированным* порядка 1, ILI , KLASSA(1), ES LI  $X_t$  ESTX(0)-  
PROCESS

pROSTEJ[IJ PRIMERI(1)-PROCESSASLU^AJNOE BLUVDANIKROME  
TOGQ@BOJ PROCESS WIDA

$$X_t = C \sum_{i=1}^t \varepsilon_i + \sum_{i=0}^{\infty} C_i \varepsilon_{t-i}$$

QWLQETSQ)-PROCESSO KRAJNEJ MERI  $C \neq 0$ . ZAMETXTET<sup>O</sup> I(1)-PROCESS NESTACIONAREN A NESTACIONARNOSTX PROPADAET POSLE WZQTIQ RAZNOSTEJ

PRIMER 2. rASSMOTRIM TREHMERNYJ PROCESS

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \sum_{i=1}^t \varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2t}, \\ X_{2t} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \varepsilon_{1i} + \varepsilon_{3t}, \quad t = 0, 1, \dots, T, \\ X_{3t} &= \varepsilon_{4t}. \end{aligned}$$

qSNQ^TO  $X_t$  NESTACIONAREN I  $X_t$  STACIONAREN I PRINADLEVIT KLASSU I(0). SLEDOWATELXNO ESTX(1)-PROCESSOTORYJ DELAETSQ STACIONARNYM PRI WZQTII RAZNOSTEJSNO TAKVETO  $X_{1t} - 2X_{2t}$  STACIONAREN MY GOWORIMO  $X_t$  KOINTEGRIROWAN S WEKTOROM KOINTEGRACII A PROCESS  $\sum_{i=1}^t \varepsilon_{1i}$  NAZYWAETSQ *стохастическим трендом*. TAKIM OBRAZOM STACIONARNOSTX MOVET BYTX POLU^ENA KAK W REZULXTATE WZQTIQ RAZNOSTEJAK I PRI WZQTII OPREDELENNOJ LINEJNOJ KOMBINACII

rASSMOTRENNYJ PRIMER DELAET QSNYM SLEDU@JEE OPREDELENIE KOINTEGRACII

OPREDELENI E. eSLI PROCESS  $X_t$  | INTEGRIROWANNYJ- PO RQDKA I LINEJNAQ KOMBINACIQ  $X_t, \beta \neq 0$ , PRI NEKOTOROM  $X_0$  BUDET STACIONARNQ  $X_t$  NAZYWAETSQ *интегрированным процессом*,  $A\beta$  | *коинтегрирующим вектором*. mAKSIMALXNOE ^ISLO LINEJNO NEZAWISIMYH KOINTEGRIRU@JIH WEKTOROW NAZYWAETSQ *рангом коинтеграции*, A PODPROSTRANSTWOPOROVDENNQ *пространством коинтеграции*.

OPREDELENIE(1) BYLO DANO W TERMINAH RAZNOSTEJOTOM NI^EGO NE GOWORIOSX OB UROWNHPRQCESSAUVNO OVIDATXQ WOOBJE GOWORQGO NELXZQ BUDET SKAZATX OTNOSITELXNO LINEJNYH KOMBINACIJ UROWNEJ  $X_t$ . tAK, ESLI PROCESSOPISANNYJ W PRIMERE STARTUET S NA^ALXNYH ZNA^ENIJ  $X_{20}, X_{30}$ , TO LINEJNAQ KOMBINACIQ  $X_{1t} - 2X_{2t}$  BUDET STACIONARNOJ TOLXKO W TOMESLUE ZNA^ENIE  $X_{10} - 2X_{20}$  IMEET INWARIANTNOE RASPREDELENIE

aNALOGI^NOE ZAME^ANIE IMEET MESTO I DLQ PRO~~CESSA~~ ~~RA~~, OPREDELENNOGOYKAK  $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1, \dots, T$ . ZDESX<sub>t</sub> QWLQETSQ FUNKCIEJ  $Y_0$  I  $\varepsilon$ :

$$Y_t = \rho^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \rho^i \varepsilon_{t-i}.$$

[TOT PROCESS BUDET STACIONARENIMMY WOZXEMS PODHODQJIM NA^ALXNYM RASPREDELENIEMENNOV(0,  $\sigma^2/(1 - \rho^2)$ ).

ZAMETXTET<sup>O</sup> OPREDELENIE(1)-PROCESSA INWARIANTNO OTNOSITELXNO NEOSOBYH LINEJNYH PREOBRAZOWANIJ W TOMESLUE ESTX

$I(1)$ -PROCESSA | MATRICA POLNOGO RANKA  $X_t$  TAKVE PRINADLE  
VIT  $I(1)$ . eSLI  $\beta$  | KOINTEGRIRU@JIJ WEKTOR  $DLQ TO A^{-1'}\beta$  BUDET  
KOINTEGRIRU@JIM WEKTOROM  $DLQ$

w OSNOWE PONQTIQ KOINTEGRACII LEVIT IDEQ TOTOM NEKOTORYH  
SLU^AQH OTSUTSTWIE STACIONARNOSTI U MNOGOMERNOGO PROCESSA WYZYV  
SQ OBJIM STOHAСТИ^ESKIM TRENDOMORYJ MOVET BYTX USTRANEN PU  
TEM WZQTIQ OPREDELENNOJ LINEJNOJ KOMBINACII KOMPONENTW PROCESSA  
REZULXTATE ^EGO \TA LINEJNAQ KOMBINACIQ BUDET STACIONARNOJ

w \KONOMIKE I DRUGIH PRILOVENIQH STATISTIKI AWTOREGRESSIONNYE  
PROCESSY DAWNO PRIMENQ@TSQ DLQ OPISANIQ STACIONARNYH QWLENIJ  
IDEQ OPISYWATX PROCESQ IZ PRED[ESTWU@JIIH ZNA^ENI@KAZA  
LASX PLODOTWORNOSTI DLQ SOSTAWLENIQ. PREDGMEZOWHOTIM WY  
QWITX SWQZI MEVDU ZNA^ENIQMI PEREMENNOQJIMISQ K ODNOMU I  
TOMU VE MOMENTU WREMENI@X PONQTX WZAIMODEJSTWIE \KONOMI^E  
SKIH FAKTORQW MY POLU^IM GORAZDO BOLX[E INFORMACII BUDEM  
SOPOSTAWLQTX ZNA^ENIQ TOJ ILI INOJ PEREMENNOJ S ODNOWREMENNIMI E  
ZNA^ENIQMI DRUGIH PEREMENNYH S EE VE PRO[LYMI ZNA^ENIQMI  
MOVNO SKAZATX :ESLI NAS INTERESU@T SOOTNO[ENIQ MEVDU RAZNYMI  
PEREMENNYMI SLEDUET RASSMATRIWATX LINEJNYE KOMBINACII ZNA^E  
NIJ, OTNOSQJIIHQ K ODNOMU MOMENTU WREMENI@X NAS INTERESUET  
DINAMIKA \WOL@CII PEREMENNYH MY DOLVNY ISSLEDOWATX ZAWISIMO  
STI OT PRO[LYH ZNA^ENIJ

pRI^INA POPULQRNOSTI PONQTIQ KOINTEGRACII W \KONOMETRIKE ZA  
KL@^AETSQ W TOM SLEDUQ TRADICII KOMISSII KOULSKLASSI^ESKIE  
MAKROKONOMI^ESKIE MODELI ^ASTO FORMULIRU@TSQ W WIDE LINEJNYH SO  
OTNO[ENIJ MEVDU ODNOWREMENNIMI ZNA^ENIQMI PEREMENNYMI  
NA TQ^TO MNOGIM MOVET BYTX DAVE BOLX[INSTWOKONOMI^ESKIE PERE  
MENNYE NESTACIONARNIQ TAKIH URAWNENIJ BYLA RAZRABOTANA DLQ  
STACIONARNYH PROCESQW MY S^ITAEM KLASSI^ESKIE SOOTNO[ENIQ  
W \KONOMIKE USTOJ^IWYTO LEGKO PREDSTAWITX S^EBI SOOTNO  
[ENIQ MOGUT BYTX STACIONARNYMAE ESLI SAMI PEREMENNYE NESTA  
CIONARNYKOINTEGRACIQ PREDSTAWLQET SOBOJ MATEMATI^ESKU@ FORMU  
LIROWKU \TOGO QWLENIQ

sLEDU@JEJ TEMQKOTORU@ MY OBSUDIM W RAMKAH AWTOREGRESSION  
NYH MODELEJBUDUT TAK NAZYWAEMYE *модели коррекции ошибок*. ITO  
PONQTIE WOSHODIT K RABQTE DLQ POSTROENIQ MODELEJ NEPRERYW  
NOGO WREMENI ISPOLXZOWALISX IDEI IZ INVENERNOJNAUKQDE TE  
VE IDEI PRIMENENY DLQ POSTROENIQ MODELEJ S DISKREITNYMI WO  
WREMENI@T PROSTEJ[IJ PRIMER TAKOJ MODEKOTORYJTEM NE MENEE  
ILL@STRIRUET WSE EE GLAWNYE SWOJSTWA

p R I M E R 3. oPREDELIM PROCESSY POSREDSTWOM AWTOREGRESSION  
NOJ MODEL

$$\begin{aligned} i \quad X_{1t} &= -\alpha_1(X_{1,t-1} - 2X_{2,t-1}) + \varepsilon_{1t}, \\ i \quad X_{2t} &= \varepsilon_{1t}, \end{aligned} \quad t = 1, \dots, T.$$



## PROS, SWQZANNYE S INTERPRETACIEJ KOINTEGRACII PRIMENITEĽXNO K RAZ LI^NYM PRILOVENIQM

*Математические вопросы:*

- | k KAKOMU TIPU NESTACIONARNYH PROCESSOW QINDBQCSQSY
- | KAKIE MODELI POROVDA@T KOINTEGRIROWANNYE PROCESSY

*Вопросы интерпретации:*

- | KAK W TERMINAH KOINTEGRACIONNYH SOOTNO[ENIJ SFORMULIROWATX PRIWLEKA@JIE INTERES \KONOMI^ESKIE GIPOTEZY
- | KAKOWA INTERPRETACIQ KOINTEGRACIONNYH SOOTNO[ENIJ I KAK MOVNO USPE[NO PRIMENQTX MODELI KORREKCII QIBOK

*Вопросы статистики:*

- | KAK OPREDELITX ^ISLO KOINTEGRACIONNYH SOOTNO[ENIJ I OBJIH TRENDOW
- | KAK OCENIWATX KOINTEGRACIONNYE SOOTNO[ENIQ I OBJIE?TRENDY
- | KAK PROWERQTX GIPQTEZY MOSQJIESQ K RANGU KOINTEGRACII
- | KAK NA KOINTEGRACIONNYH SOOTNO[ENIQH PROWERQTX \KONOMI^ESKIE GIPOTEZY

*Вероятностные вопросы:*

- | KAK WYGLQDITASIMPTOTI^ESKIQ TEORIQ STATISTI^ESKIH KRITERI EW I OCENOK I MOVNO LI POLU^ITX BOLEE HOROJIE PRIBLIVENIQ DLQ TO^NYH RASPREDELENIJ

dalee MY OBSUDIM NEKOTORYE IZ \TIH WOPROSOW ZDELAH RASSMOTRIM PRIMER PRILOVENIQ W \KONOMIKE