

**ЙЕНСЕН Б. А., НИЛЬСЕН Й. А.**

**РАСЧЕТ ЦЕНЫ В ОТСУТСТВИЕ АРБИТРАЖА**

**Содержание**

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Введение. . . . .                                                                    | 900 |
| 2. Обозначения. . . . .                                                                 | 903 |
| 3. Условие отсутствия арбитража. . . . .                                                | 904 |
| 4. Эквивалентные мартингалльные меры и процессы цен, нейтрализованных к риску . . . . . | 908 |
| 5. Замена денежной единицы . . . . .                                                    | 909 |
| 6. Достижимость. . . . .                                                                | 910 |
| 7. Многошаговая модель с дискретным временем . . . . .                                  | 914 |
| 8. Полный рынок и расщепляющий индекс . . . . .                                         | 920 |
| 9. Полный рынок и мартингалльный базис . . . . .                                        | 927 |
| 10. Модели непрерывного времени: основные допущения . . . . .                           | 932 |
| 11. Процессы для относительных цен и замена денежной единицы. . .                       | 934 |
| 12. Полный рынок. Случай непрерывного времени . . . . .                                 | 940 |
| 13. Эквивалентные мартингалльные меры и отсутствие «приближенного арбитража». . . . .   | 942 |
| 14. Заключительные замечания . . . . .                                                  | 943 |
| Благодарности . . . . .                                                                 | 944 |
| Список литературы . . . . .                                                             | 944 |

---

*Jensen B. A., Nielsen J. A.* Pricing by no arbitrage. — В кн: Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields. Ed. by D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen, 1996, p. 177–223. Publisher: Chapman & Hall, 1996 г.

© Bjarne Astrup Jensen, Jørgen Aase Nielsen, 1996 г.

© Перевод на русский язык с разрешения владельца прав. Научное издательство «ТВП», 1996 г.

## 1. Введение

Задача расчета цены финансовых активов уже давно является центральной как для практиков финансового рынка, так и для исследователей в области экономики и финансов. Однако в последние 15 лет эта тема привлекает также внимание математиков, в особенности — специалистов по теории вероятностей. Одновременно с этим развитие все более сложных моделей расчета цен породило быстро растущий поток публикаций, посвященных разработке статистических методов оценки параметров и идентификации процессов.

Все теории и модели формирования цен на финансовых рынках можно разбить на (по крайней мере) две принципиально разных категории. Модели первого типа пытаются описать уровень цен на финансовые активы, премии за риск и т. д. в абсолютном выражении в терминах так называемых «фундаментальных показателей». К этому типу моделей относится хорошо известная «модель рациональных ожиданий», в которой цена акции приравнивается к дисконтированному значению ожидаемых в будущем дивидендов. Модели второго типа преследуют более скромные задачи, а именно, пытаются объяснить относительное поведение цен некоторых финансовых активов в терминах известных или наблюдаемых цен на другие активы. В данной работе мы будем иметь дело именно с теориями второго типа.

Механизм формирования цены на финансовых рынках обладает рядом характеристик, делающих поведение этих рынков предельно близким к тому, что говорит нам давнишняя и удобная с точки зрения анализа парадигма из учебников, утверждающая полную делимость и мгновенное распространение информации. Количественные дисконты — редкое явление на финансовых рынках, а проблемы неделимости обычно не принимаются в расчет. Следовательно, для механизма формирования цены характерна *линейность*.

Эти факты объясняют причины двоякого подхода к оценке финансовых активов. Экономические соотношения, участвующие в относительной оценке финансовых активов, приводят к линейным функционалам цены, действующим на случайные платежи по финансовым активам, в то время как теория вероятностей и современная теория мартингалов дают нам теоремы о математическом представлении этих линейных функционалов. Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что имеет место эквивалентность между активом, оцениваемым через некоторые линейные функционалы, как экономическим явлением, и представлением цены актива в виде мартингала относительно некоторой вероятностной меры.

Указанная эквивалентность происходит из одного очень простого понятия экономической теории — понятия *арбитража*. В старой экономической литературе понятие арбитража имеет немного иное значение,

чем это стало общепринято сейчас. Там под арбитражером понимался банкир, который ищет наиболее выгодный способ выполнить распоряжение своего клиента о проведении платежа, причем, как правило, этот платеж должен включать операцию обмена валюты, необходимую для совершения экспортно-импортных операций. Основное предположение попросту говорит, что все участники рынка хотят получить больше, а не меньше — они «жадные» — и что за любое увеличение потребления надо как-то платить. Последнее предположение хорошо известно как условие «no free lunch».

Эти предположения, в действительности, являются очень слабыми. Помимо того, что все участники рынка «жадные», т.е. каждый, кто имеет возможность получить что-либо даром, не преминет ею воспользоваться, они могут быть разнородными в смысле своих предпочтений в потреблении в зависимости от сроков и состояния экономики: некоторые из них не расположены к риску, другие — склонны к нему, кто-то явно предпочитает немедленное потребление, а кто-то — сбережение в расчете на возможности потребления в будущем. Единственное, что всех их объединяет, — это то, что они жадные.

Концепция отсутствия арбитража настолько проста, что она практически игнорировалась академическим сообществом в силу ложного ощущения, что она является слишком тривиальной для того, чтобы привести к каким-то новым результатам. Примечательным исключением из этого правила является знаменитое рассуждение Модильяни-Миллера [23] о безразличности относительно способа структурирования капитала, хотя в количественном отношении оно отличается от более поздних результатов в экономике финансов.

Вопреки таким представлениям, интенсивное развитие экономической теории финансов, начавшееся в 70-е годы и продолжающееся по сей день, показало, что аргументы, основанные на соображениях отсутствия арбитража, могут привести к весьма далеким выводам. Начиная со знаменитой работы Блэка и Шоулса [3] и других, появившихся в то же время, но менее известных результатов, методология, основанная на «отсутствии арбитража», стала краеугольным камнем теорий расчета цен производных финансовых инструментов и так называемой «финансовой инженерии».

Хотя мы и не ограничиваем предпочтения, ясно, что очевидная причина существования финансовых рынков связана с различиями в предпочтениях и спросе участников рынка на перераспределение (1) возможностей потребления в зависимости от сроков и (2) индивидуального риска. Структура цен, возникающая в результате такого перераспределения, в точности соответствует наилучшему возможному варианту удовлетворения запросов потребителей. Это значит, что в ценах активов финансового рынка должны отражаться эти две цели.

Финансовый актив можно представлять себе как своеобразный

сплав, составленный из первичных «строительных элементов», соответствующих отдельным составляющим риска и датам, на которые придутся платежи. Если мы умеем определять цену таких первичных элементов исходя из цен акций, облигаций и других финансовых активов, обращающихся на рынке, то мы можем создавать и оценивать — пользуясь свойством линейности цены — новые активы, просто набирая другие сочетания «строительных блоков». В некоторых случаях цена всех элементарных блоков определяется однозначно. Тогда и цена вновь созданного актива определяется однозначно. Такая ситуация на рынке называется *полным* рынком. В других случаях бывает возможно установить цену только для части элементарных блоков. Такая ситуация называется *неполным* рынком. В этом случае лучшее, что можно сделать, не вводя специфических для данного конкретного инвестора предпочтений, — это найти границы цены нового актива.

План настоящей работы следующий. В разделе 2 вводятся математические понятия и обозначения. В разделах 3–6 описывается базовая модель, включающая в себя только будущие данные, а также даются точные математические определения для основных экономических понятий.

В разделе 3 излагается фундаментальная, но при этом весьма элементарная, теорема 1, устанавливающая эквивалентность между отсутствием арбитража и линейностью цены. В разделах 4 и 5 как следствия из теоремы 1 вводятся понятия об эквивалентных мартингальных мерах. В разделе 6 установлена эквивалентность между линейным оцениванием и мартингальным представлением цен. Изложение материала сопровождается численными примерами, иллюстрирующими теоретические результаты.

В разделах 7–9 рассматриваются многопериодные модели дискретного времени. Несмотря на то, что этот материал представляет собой, по большей части, вариации рассуждений разделов 3–6 и аналоги соответствующих утверждений, эта тема оказывается гораздо богаче и приводит к необходимости ввести ряд новых математически точно определяемых понятий. Приводятся численные примеры, обсуждаются понятия «расщепляющегося индекса» и «мартингального базиса» как меры интенсивности поступления информации.

В разделах 10–13 рассматриваются модели непрерывного времени. Объем данной статьи позволяет дать замкнутое учебное изложение случая дискретного времени, но уже недостаточен для случая моделей непрерывного времени. Задействованная здесь техника носит весьма сложный характер. Все же на этом материале нам удастся получить некоторые новые, по сравнению с дискретным временем, экономические представления. Не приводя полных и подробных доказательств, мы постараемся изложить, на наш взгляд, наиболее значимые фрагменты теории, а также провести параллели с соответствующими утверждениями про

---

модели дискретного времени. В разделе 14 содержатся заключительные замечания и даются ссылки на литературу, к которой читатель может обратиться за более полными и строгими доказательствами и более подробным изложением предмета.