ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 18 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2011

Секция «**Финансовая и страховая математика**»

АНДРЕЕВА У. В., ***ДЁМИН Н. С.***, ***ЕРОФЕЕВА Е. В.***

ОПЦИОНЫ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА НА ОСНОВЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕНЫ РИСКОВОГО АКТИВА

§ 1. Введение

Опцион является производной (вторичной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право покупки или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного актива по оговоренной цене, а продавец опциона — за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению [1–5]. В первом случае имеем опцион покупки (call option), во втором — опцион продажи (put option). Платежные стандартные функции этих опционов, определяющие величину выплаты при предъявлении опциона к исполнению, имеют вид

$$f_T^c(S_T) = (S_T - K)^+, \quad f_T^p(S_T) = (K - S_T)^+ \tag{1.1}$$

соответственно, где S_T —- цена базисного актива в момент исполнения T (спотовая цена — spot price), K — цена исполнения контракта (страйковая цена — striking price), $a^+ = \max\{a, 0\}$. Опционы, соответствующие платежным функциям (1.1), получили название *стандартных опционов* соответственно *покупки* и *продажи европейского типа* в случае фиксированного T. С развитием рынка опционных контрактов стали появляться дополнительные требования к условиям заключения контрактов. Платежные функции с дополнительными условиями породили класс экзотических опционов (exotic options) [6–8]. Одним из дополнительных условий является учет ценовой истории базисного актива от момента заключения контракта $t = 0$ до момента исполнения $t = T$ (path-dependent options, history-dependent options, lookforward options, lookback options) [4–11]. Важным частным случаем подобных опционов являются опционы, основанные на учете экстремальных значений цены базисного актива на интервале $t \in [0, T]$ (options on extremes). В данной работе рассматриваются опционы покупки и продажи подобного типа соответственно с платежными функциями (fixed strike lookback call option, fixed strike lookback put option) [10]

$$f_T^{c_{\max}}(S) = \big(\max_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t - K\big)^+, \quad f_T^{p_{\min}}(S) = \big(K - \min_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t\big)^+, \tag{1.2}$$

и платежными функциями (reverse fixed strike lookback call option, reverse fixed strike lookback put option)

$$f_T^{c_{\min}}(S) = \big(\min_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t - K\big)^+, \quad f_T^{p_{\max}}(S) = \big(K - \max_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t\big)^+, \tag{1.3}$$

когда присутствуют выплаты по дивидендам на базисный актив. Стандартный опцион покупки предъявляется к исполнению, если цена базисного актива S_T в момент исполнения T больше цены исполнения K. Опцион покупки с платежной функцией $f_T^{c_{\max}}(S)$ вида (1.2) предъявляется к исполнению, если величину K превышает максимальное значение цены базисного актива, а с платежной функцией $f_T^{c_{\min}}(S)$ вида (1.3), если величину K превышает минимальное значение цены базисного актива на интервале $t \in [0, T]$. Стандартный опцион продажи предъявляется к исполнению, если цена базисного актива в момент исполнения T меньше цены исполнения K. Опцион продажи с платежной функцией $f_T^{p_{\min}}(S)$ вида (1.2) предъявляется к исполнению, если величина K превышает минимальное значение цены базисного актива, а с платежной функцией $f_T^{p_{\max}}(S)$ вида (1.3), если величина K превышает максимальное значение цены базисного актива на интервале $t \in [0, T]$.

Замечание 1. Дополнительные условия, вносимые в платежные обязательства экзотических опционов, могут быть как в пользу покупателя, так и в пользу продавца опциона, что в первом случае должно приводить к увеличению, а во втором — к уменьшению цены опциона. Так как $\max_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t \geqslant S_T$ и $\min_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t \leqslant S_T$, опционы с платежными функциями $f_T^{c_{\max}}(S)$ и $f_T^{p_{\min}}(S)$ соответствуют платежным обязательствам в пользу покупателя опциона, поскольку относительно стандартных опционов увеличивают вероятность предъявления опционов к исполнению, а с $f_T^{c_{\min}}(S)$ и $f_T^{p_{\max}}(S)$ — в пользу продавца опциона, так как вероятность предъявления опционов к исполнению уменьшается.

В достаточно подробном и обстоятельном обзоре [8] отмечается, что в настоящее время на рынках используются несколько десятков экзотических опционов, теория которых разработана в незначительной степени и контракты по которым заключаются, исходя из эвристических соображений. В [1, 2] приводятся формулы для цены опционов покупки и продажи в случае платежных функций соответственно (floating strike lookback call option, floating strike lookback put option) [9]

$$f_T^c(S) = S_T - \min_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t, \quad f_T^p(S) = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t - S_T \tag{1.4}$$

без дивидендов. Исследование портфеля для платежных функций (1.4) показало их вырожденность в том смысле, что капитал формируется только на основе рискового актива, а безрисковый актив присутствует лишь виртуально в виде зависимости цены опциона от процентной ставки.

В данной работе на основе диффузионной модели (B, S)-финансового рынка с выплатой дивидендов по рисковым активам рассматриваются опционы с платежными функциями (1.2), (1.3), для которых указанная вырожденность устраняется и портфель формируется из рискового и безрискового активов.

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ — вероятность события; $\mathbf{E}\{\cdot\}$ — математическое ожидание, $\mathcal{N}\{a, b\}$ — плотность нормального распределения с параметрами a и b, $I[A]$ — индикаторная функция события A, интеграл без указания пределов означает интегрирование на интервале $R = (-\infty, \infty)$,

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(y)\, dy, \quad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}. \tag{1.5}$$

Доказательства вынесены в приложение.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathcal{P})$ [1–3]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t), \quad dB_t = rB_t\, dt, \tag{2.1}$$

где W_t — стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$, $r > 0$, $S_0 > 0$, $B_0 > 0$, решения которых имеют вид

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}, \quad B_t = B_0 e^{rt}. \tag{2.2}$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде $X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$, где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ — пара $\mathcal{F}_t$-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. Аналогично [12, § 6], предполагается, что за обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с таким коэффициентом δ, что

Тогда (4.9) следует из (П.96), (П.110). Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Формула (4.10) следует из (4.9) аналогично тому, как формулы (4.3), (4.6) следовали из (4.1), (4.2). Аналогично (П.94)

$$\gamma_t^{p\max} = \frac{\partial X_t^{p\max}(s)}{\partial s}\Big|_{s=S_t}, \quad \beta_t^{p\max} = \frac{X_t^{p\max}(S_t) - \gamma_t^{p\max} S_t}{B_t}. \tag{П.111}$$

Из (4.10) с учетом (П.35) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_t^{p\max}(s)}{\partial s} = &-\Big[(1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}[\Phi(y_1(t)) - \Phi(-d_1(t))] \\ &+(1-\alpha^{-1})e^{-r(T-t)}[\Phi(-d_2(t)) - (K/s)^\alpha \Phi(-y_2(t))]\Big] + \Psi,\end{aligned} \tag{П.112}$$

где Ψ определяется формулами (П.37)–(П.39). Поскольку, как было доказано, $\Psi = 0$, (4.11) следует из (П.111), (П.112), а (4.12) — из (4.10), (4.11), (П.111). Теорема 8 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.*, *Кабанов Ю. М.*, *Крамков Д. О.*, *Мельников А. В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 80–129.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
3. *Мельников А. В.*, *Волков С. Н.*, *Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
4. *Wilmott P.* Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering. N. Y. etc: Willey, 2000.
5. *Халл Д. К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007.
6. *Rubinstein M.* Exotic Options. Berkeley.: Inst. Business Econom. Res., 1991, Finance working paper № 220.
7. *Zang P. G.* An introduction to exotic options. — European Financ. Manag., 1995, v. 1, № 1, p. 87–95.
8. *Кожин К.* Все об экзотических опционах. I; II; III — Рынок ценных бумаг, 2002, № 15, с. 53–57; № 16, с. 61–64; № 17, с. 68–73.
9. *Conze A.*, *Viswanathan V.* Path dependent options: the case of lookback options. — J. Finance, 1991, v. 46, № .5, p. 1893–1907.
10. *Buchen P.*, *Konstandatos O.* A new method of pricing lookback options. — Math. Finance, 2005, v. 15, № 2, p. 245–259.
11. *Инглис-Тейлор Э.* Производные финансовые инструменты. М.: ИНФРА-М., 2001.
12. *Шепп Л. А.*, *Ширяев А. Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона». — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, № 1, с. 130–148.
13. *Котлобовский И. Б.*, *Тутубалин В. Н.*, *Угер Е. Г.* Оценка возможности внедрения «Русского опциона» на американском фондовом рынке. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, № 1, с. 78–98.

Поступила в редакцию
02.IX.2009