ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 18 **МАТЕМАТИКИ** **Выпуск 1**
2011

Секция «**Прикладная вероятность и статистика**»

ЗАЙЦЕВА О. Б.

АНАЛИЗ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ БЕЗОПАСНОСТИ

Проблема безопасности в настоящей работе понимается как проблема изучения свойств процессов функционирования технических, экономических, экологических и т. п. систем. При этом учитываются развитие ситуации во времени, различные факторы неопределенности (например, стохастические), наличие управления и оптимизации процессов управления. Все это позволяет использовать при построении математических моделей безопасности модели управляемых случайных процессов, в частности, процессов восстановления, управляемых марковских и полумарковских процессов с катастрофами. Класс случайных процессов с катастрофами был введен в работах [1, 2]. Траектории этих процессов — ступенчатые функции, решения принимаются в марковские моменты — моменты изменения состояний. В модели оптимизация и управление ведутся по классу марковских однородных рандомизированных стратегий, который задается множеством вероятностных мер $G_i(B)$ — вероятностью того, что в состоянии $i \in E$ принято решение из множества $B \in A_i$ — σ-алгебра подмножеств множества U_i допустимых в состоянии i решений.

Однородный управляемый полумарковский процесс с катастрофами $Y(t)=(\xi(t), u(t), \theta(t), \eta(t))$ задается:

— матрицами $\{Q_{ij}(t,u\}$, элементы которых определяются как вероятность того, что процесс до момента t перейдет в состояние j при пребывании процесса в состоянии i и принятии решения u;

— семейством распределений $F_{ij}(t,x,u)$, которые определяются как условные распределения времени до катастрофы на одном интервале между соседними переходами управляемого полумарковского процесса. Условия определяются параметрами, характеризующими состояние i процесса на этом интервале, следующее состояние j процесса, длительность этого интервала t и решение u, которое было принято в начале этого интервала;

— начальным распределением вероятностей p_i состояний $i \in E$.

Процесс возникновения катастроф обладает следующим свойством: если на некотором интервале между марковскими моментами катастрофы не наступило, то на следующем интервале распределение момента катастрофы от прошлого не зависит, а зависит от текущего состояния, от состояния, в которое перейдет процесс, от длительности перехода и от принятого решения.

Критерием (количественным показателем), характеризующим безопасность процесса функционирования, является момент наступления катастрофы.

Ф о р м у л и р о в к а п р о б л е м ы. Момент наступления катастрофы есть случайная величина, поэтому необходимо определить функцию распределения и математическое ожидание этой случайной величины в зависимости от исходных характеристик. Цель — определить оптимальную стратегию управления, при которой

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2011 г.

математическое ожидание момента наступления катастрофы принимает максимальное значение.

Исследование вероятностных характеристик момента катастрофы. Обозначим τ календарный момент катастрофы и $\Psi_i(x) = \mathbf{P}\{\tau < x \,|\, \xi(0) = i\}$ условное распределение этой случайной величины при условии, что процесс стартует из состояния i, $i \in E$, $\overline{\Psi}_i(x) = 1 - \Psi_i(x) = \mathbf{P}\{\tau \geqslant x \,|\, \xi(0) = i\}$. Используя формулу полной вероятности и отмеченное выше свойство полумарковского процесса, получаем систему интегральных уравнений

$$\overline{\Psi}(x) = \sum_{j\in E} \int_{u\in U_i} \left[\int_0^x \overline{F}_{ij}(t,t,u)\overline{\Psi}_j(x-t)\, d_iQ_{ij}(t,u) + \int_x^\infty \overline{F}_{ij}(t,x,u)\, d_iQ_{ij}(t,u) \right] G_i(du). \tag{1}$$

В рассматриваемом случае полная группа несовместных событий связывается с первым переходом процесса в новое состояние и принятием любого возможного решения. В состоянии i можно принять решение u из множества U_i, первый переход осуществляется в состояние j, $j \in E$, и, наконец, этот переход может произойти в момент t, $t \in [0, \infty)$. Это множество несовместных событий образует полную группу. Первая сумма в равенстве (1) соответствует ситуации, когда $t < x$ и первый переход в состояние j осуществится в момент t.

До момента x не произойдет катастрофы, если ее не будет до момента t и за оставшееся время $x-t$ не произойдет катастрофы, но уже при старте из состояния j.

Вероятность того, что за оставшееся время $x - t$ не произойдет катастрофы при старте из состояния j, зависит только от этого состояния, поэтому условная вероятность этого события равна $\overline{F}_{ij}(t,t,u)\overline{\Psi}_j(x-t)$. Вторая сумма в равенстве (1) соответствует ситуации, когда первый переход в состояние j осуществится в момент t и $t > x$. В этом случае до момента x не произойдет катастрофы, если четвертая компонента меньше x. Вероятность этого события равна $\overline{F}_{ij}(t,x,u)$. Таким образом, получаем соотношения (1).

Поставим задачу исследовать зависимость условного математического ожидания $M_i = \mathbf{M}(\tau \,|\, \xi(0) = i)$ от исходных характеристик, определяющих управляемый полумарковский процесс с катастрофами. Интегрированием уравнений получаем систему

$$M_i = \sum_{j\in E} \int_{u\in U_i} \int_0^\infty \left[\int_0^t x\, d_xF_{ij}(t,x,u) + \int_t^\infty (t+M_j)\, d_xF_{ij}(t,x,u) \right] d_tQ_{ij}(t,u)G_i(du), \tag{2}$$

или

$$(I - \beta_{ii})M_i - \sum_{j\neq i} \beta_{ij}M_j = b_i, \tag{3}$$

в которой коэффициенты определяются равенствами

$$b_i = \sum_{j\in E} \int_{u\in U_i} \int_0^\infty \left[\int_0^t x\, d_xF_{ij}(t,x,u) + \int_t^\infty t\, d_xF_{ij}(t,x,u) \right] d_tQ_{ij}(t,u)G_i(du), \tag{4}$$

$$\beta_{ij} = \int_{u\in U_i} \overline{F}_{ij}(t,t,u)\, d_iQ_{ij}(t,u)D_i(du). \tag{5}$$

Коэффициентам β_{ij}, b_i, $i,j \in E$, определяемым равенствами (4) и (5), можно дать вероятностную интерпретацию. Коэффициент β_{ij} равен условной вероятности

Искомая характеристика C_k — математическое ожидание затрат до момента катастрофы при условии, что процесс стартует из состояния i, $i \in E$, удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$C_k = c_k + \sum_{i \neq k} \widetilde{p}_{ki} C_i, \tag{32}$$

где $c_0 = 0$, $c_k = s_k \int_0^\infty e^{-\lambda t} \overline{F}_k(t)\, dt$, $k = 1, 2, 3$. При $k = 0$ справедливо равенство $c_0 = 0$, так как в этом состоянии восстановительных работ не проводится.

Из (32) с учетом (26) получаем

$$C_0 = C_1 \overline{F}(u_0) + C_2 \int_0^{u_0} e^{-\lambda(u_0 - y)} \overline{\Phi}(u_0 - y)\, dF(y) + C_3 \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(u_0 - x)\, d\Phi(x),$$

$$C_i = s_i b_i + C_0 z_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Решая эту систему, получаем $C_0(u_0) = A(u_0)/\Delta(u_0)$, где определитель $\Delta(u_0)$ определяется равенством (28), а числитель равен

$$A(u_0) = s_1 b_1 \overline{F}(u_0) + s_2 b_2 \int_0^{u_0} e^{-\lambda(u_0 - y)} \overline{\Phi}(u_0 - y)\, dF(y) + s_3 b_3 \int_0^{u_0} e^{-\lambda x} F(u_0 - x)\, d\Phi(x).$$

Таким образом, получаем затраты $C_0(u_0)$, которые будут иметь место при обеспечении максимального значения математического ожидания времени до катастрофы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вопросы математической теории надежности. / Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983.
2. *Каштанов В. А., Янишевский И. М.* Исследование функционалов на траекториях процесса с конечным множеством состояний. — Кибернетика и системный анализ, 1998, № 1, с. 145–156.
3. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970, 265 с.
4. *Каштанов В. А., Медведев А. И.* Теория надежности сложных систем. М.: Физматлит, 2010, 606 с.
5. *Джевелл В. С.* Управляемые полумарковские процессы. — В сб.: Кибернетический сборник. Новая серия. В. 4./ Под ред. А. А. Ляпунова, О. Б. Лупанова. М.: Мир, 1967, с. 97–137.
vskip10pt

Поступила в редакцию
21.XII.2010