ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 18 МАТЕМАТИКИ Выпуск 6
2011

ТИМАШЕВ А. Н.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ С РАСТУЩИМ ЧИСЛОМ СЛАГАЕМЫХ

Получены асимптотические оценки числа $r_s(N)$ векторов в $\mathbf{R}^s$ с целочисленными компонентами, лежащих на s-мерной сфере радиуса $N^{1/2}$ с центром в нуле (т. е. числа решений уравнения $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=N$ в целых числах $x_1,x_2,\ldots,x_s$), справедливые при $N,s\to\infty$ (рассмотрены три области изменения параметров N, s). Аналогичные оценки установлены для числа $R_s(N)$ векторов в $\mathbf{R}^s$ с целочисленными компонентами, лежащих в s-мерном замкнутом шаре с центром в нуле того же радиуса, т. е. числа решений неравенства $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2\leqslant N$ в целых числах $x_1,x_2,\ldots,x_s$. Выведены предельные теоремы, оценивающие распределения заполнений ячеек в соответствующей обобщенной схеме размещения.

Ключевые слова и фразы: аддитивные задачи с растущим числом слагаемых, многомерная сфера, многомерный шар, тета-функция, метод перевала, неравенство Коши–Буняковского, корень уравнения, вклад точки перевала, обобщенная схема размещения.

Пусть $r_s(N)$ — число векторов в $\mathbf{R}^s$ с целочисленными компонентами, лежащих на s-мерной сфере радиуса $\sqrt{N}$ с центром в точке $(0,0,\ldots,0)$ ($s\in\mathbf{N}$, $N\in\mathbf{N}_0$), т. е. число решений уравнения

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=N \tag{1}$$

в целых числах $x_1,x_2,\ldots,x_s$.

Из (1) нетрудно вывести, что (см. [1])

$$\sum_{N=0}^{\infty} r_s(N)z^N=[f(z)]^s,\quad s=1,2,\ldots, \tag{2}$$

где при $|z|<1$

$$f(z)=1+2\sum_{k=1}^{\infty} z^{k^2}. \tag{3}$$

Равенство (3) можно представить в виде

$$f(z)=\varphi(t)=1+2\,\theta(t), \tag{4}$$

где $\operatorname{Re} t > 0$, и

$$z = e^{-\pi t}, \tag{5}$$

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 t}. \tag{6}$$

Согласно известному соотношению для тета-функции, при таких значениях t [2, с. 39]

$$\theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\Big(2\theta\Big(\frac{1}{t}\Big) + 1\Big) - \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Из (2), (3) по интегральной формуле Коши

$$r_s(N) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{[f(z)]^s}{z^{N+1}}\, dz. \tag{8}$$

Интегрирование в (8) осуществляется по окружности с центром в нуле радиуса, меньшего 1, пробегаемой в положительном направлении.

Исходя из соотношений (2)–(8) и используя метод перевала, в работе получены асимптотические оценки чисел $r_s(N)$, справедливые при $N, s \to \infty$. Ранее аналогичные вопросы рассматривались в [3–5, 9, 10] (см. также [11]).

...

. . .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хохлов В. И.* Об одном способе оценки числа целых точек на многомерных сферах в задаче оценки близости к равномерному распределению. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 1, с. 3–27.
2. *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции. М.: Наука, 1975.
3. *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
4. *Сираждинов С. Х.*, *Азларов Т. А.*, *Зупаров Т. М.* Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых. Ташкент: Фан, 1975.
5. *Исраилов М. И.* Асимптотическое разложение для числа решений диофантовой системы ГильбертаКамке. — Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1983, т. 121, с. 62–82.
6. *Тимашев А. Н.* Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике. М.: ТВП, 2011.
7. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984.
8. *Колчин А. В.* Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. — Дискретн. матем., 2003, т. 15, № 4, с. 148–157.
9. *Rankin R. A.* Representation of a number as the sum of large number of squares. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, v. 65, 1960–1961, № 4, p. 318–331.
10. *Фрейман Г. А.* Проблема Варинга с растущим числом слагаемых. – Ученые записки Елабужского гос. пед. ин-та, 1958, № 3, с. 105–119.
11. *Исраилов М. И.* Аддитивные задачи теории чисел (с растущим числом слагаемых). — В энциклопедии: Вероятность и математическая статистика. / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: БРЭ, 1999, с. 10–11.

Поступила в редакцию
04.X.2011