ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 18 МАТЕМАТИКИ Выпуск 6
2011

Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

ВИСКОВ О. В., ПРОХОРОВ Ю. В., ХОХЛОВ В. И.

ОБОБЩЕННОЕ ТОЖДЕСТВО СТЕЙНА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА

Решается задача линеаризации произведений многочленов Эрмита, т. е. задача представления таких произведений в виде линейной комбинации многочленов Эрмита. Предложены два способа решения этой задачи на основе использования обобщенного тождества Стейна.

Ключевые слова и фразы: многочлены Эрмита, «тепловые» многочлены Эрмита, вероятностные многочлены Эрмита, тождество Стейна, обобщенное тождество Стейна, ортогональные многочлены, линеаризация произведений ортогональных многочленов.

По причинам, упомянутым в докладе [4], авторы продолжают искать новые подходы к задаче линеаризации произведений ортогональных многочленов. После завершения работы [2], результаты которой были представлены, в частности, на VII Всемирном конгрессе по индустриальной и прикладной математике (Ванкувер, 16-21 июля 2011 г.), авторы обнаружили еще один перспективный подход, основанный на неожиданной связи исследуемой задачи с обобщенным неравенством Стейна. Суть этого подхода будет раскрыта на примере задачи линеаризации для многочленов Эрмита.

1°. *Многочлены Эрмита* $\mathrm{He}_n(x;t)$, $n=0,1,2,\ldots,$ формального переменного x и произвольного параметра t нередко определяют при помощи формальной экспоненциальной производящей функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{He}_n(x;t)\,\frac{z^n}{n!} = \exp\left\{x\,z - t\,\frac{z^2}{2}\right\}. \tag{1}$$

Разложение экспоненты в правой части соотношения (1) сразу же приводит к явному виду рассматриваемых многочленов:

$$\mathrm{He}_n(x;t) = \sum_{2m\leqslant n} \frac{n!\,(-t/2)^m}{(n-2m)!\,m!}\,x^{n-2m}. \tag{2}$$

Многочлены (2) при отрицательных t служат решениями задачи Коши для уравнения теплопроводности со степенными начальными данными и называются в этом случае «тепловыми» многочленами (см., например, с. 134 в [3]), а при $t = 1$ многочлены

$$\mathrm{He}_n(x) = \mathrm{He}_n(x, 1) \tag{3}$$

образуют систему многочленов, ортогональных относительно стандартного нормального распределения, и в этом случае их называют иногда *стандартными* или *вероятностными* многочленами Эрмита.

Самыми простыми по форме эквивалентными (3) определениями стандартных (вероятностных) многочленов Эрмита служат их выражения

$$\mathrm{He}_n(x) = e^{-D^2/2}\,[x^n] \quad \text{или} \quad \mathrm{He}_n(x) = (X - D)^n\,[1] \tag{4}$$

с использованием операторов D и X, первый из которых обозначает оператор дифференцирования, а второй — оператор умножения на независимое переменное; при этом в квадратных скобках указывается объект, к которому применяется оператор.

Нам понадобится одно соотношение для вероятностных многочленов Эрмита, которое получается из второго (ср. [5]) выражения в (4):

$$\begin{aligned} \mathrm{He}_{n+1}(x) &= (X - D)^{n+1}\,[1] \\ &= (X - D)\,(X - D)^n\,[1] = (X - D)\,\mathrm{He}_n(x) \\ &= x\,\mathrm{He}_n(x) - \mathrm{He}'_n(x). \end{aligned} \tag{5}$$

2° . *Тождеством Стейна* (ср. [6]) называют соотношение

$$\mathbf{M}\,g'(\eta) = \mathbf{M}\,\eta\,g(\eta), \tag{6}$$

в котором η есть случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение (ниже ее плотность будет обозначаться $\varphi(x)$), а g — любая абсолютно непрерывная функция, для которой $\mathbf{M}\,|g'(\eta)| < \infty$.

Справедливость этого тождества устанавливается интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,\eta\,g(\eta) &= \int_{\mathbf{R}} x\,g(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbf{R}} g(x)\,d\varphi(x) \\ &= -g(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbf{R}} g'(x)\,\varphi(x)\,dx = \mathbf{M}\,g'(\eta). \end{aligned}$$

Здесь использовано легко проверяемое соотношение $\varphi'(x) = -x\,\varphi(x)$, а также то обстоятельство, что все интегралы, присутствующие в этой выкладке, существуют.

3° . *Обобщенным* тождеством Стейна будем называть соотношение

$$\mathbf{M}\, g^{(n)}(\eta) = \ldots \tag{7}$$

в котором η есть случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение,

$$g^{(n)}(x) = D^n\,[g(x)], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а g — любая дифференцируемая n раз функция, для которой

$$\ldots$$

Теперь осталось, полагая $g(\eta) = e^{\eta\,(z_1+z_2+\cdots+z_k)}$ в обобщенном тождестве (7) Стейна, переписать последнее выражение в формуле (16) в виде

$$e^{-z_1^2/2-z_2^2/2-\cdots-z_k^2/2}\,(z_1+z_2+\cdots+z_k)^r\,\mathbf{M}\,e^{\eta\,(z_1+z_2+\cdots+z_k)},$$

учесть, что интеграл $\mathbf{M}\,e^{\eta\,(z_1+z_2+\cdots+z_k)}$ есть производящая функция вида $e^{(z_1+z_2+\cdots+z_k)^2/2}$, и в итоге получить искомую производящую функция в виде

$$\bigl(z_1+z_2+\cdots+z_k\bigr)^r\,\exp\Bigl\{\sum_{\nu<\mu} z_\nu\,z_\mu\Bigr\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Висков О. В.* Задача линеаризации для полиномов Шеффера. — Докл. РАН, 2001, т. 381, № 3, с. 298–301.
2. *Висков О. В.*, *Прохоров Ю. В.*, *Хохлов В. И.* Об одном подходе к задаче линеаризации для многочленов Эрмита. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 17, в. 6, с. 801–804.
3. *Миллер У., мл.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
4. *Прохоров Ю. В.*, *Висков О. В.*, *Хохлов В. И.* Способ получения формулы линеаризации произведения многочленов Эрмита. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 800.
5. *Burchnall J. L.* A note on the polynomials of Hermite. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 1941, v. 12, is. 1, p. 9–11.
6. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.

Поступила в редакцию
15.XII.2011