ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 18 МАТЕМАТИКИ Выпуск 6
2011

Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

ЗУБКОВ А. М., САЛИХОВ Н. П.

КОЛЛЕКЦИЯ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ГЛАВА I

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОМЕНТОВ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ [1)]

Содержание

§ 1.1. Неравенства для первого момента 864
§ 1.2. Неравенства для дисперсии 872
§ 1.3. Неравенства для степенных моментов 875
§ 1.4. Неравенства для абсолютных моментов 886
§ 1.5. Неравенства для семиинвариантов 891
§ 1.6. Неравенства для средних значений выпуклых или вогнутых функций 894
§ 1.7. Неравенства для средних значений монотонных функций 899
§ 1.8. Неравенства для средних значений или дисперсий произвольных функций. . 902
§ 1.9. Неравенства для экспоненциальных моментов 913
§ 1.10. Неравенства для усеченных моментов 920
§ 1.11. Неравенства для функционалов от функций распределения 923
§ 1.12. Неравенства для функций частного вида 927
§ 1.13. Неравенства для распределений частного вида 932
§ 1.13.1. Нормальное распределение 932
§ 1.13.2. Биномиальное распределение 936
§ 1.13.3. Распределения полиномиального вида 942
§ 1.13.4. Пуассоновское распределение 943
§ 1.13.5. Комбинаторные распределения 944
§ 1.13.6. Частные виды распределений 947
Список обозначений 948
Список литературы к гл. I 950

[1)] От Редакции. Этой главой мы начинаем публикацию журнальной редакции книги «Коллекция неравенств теории вероятностей».

Запланировано, что издание всей коллекции в виде единой книги будет осуществлено после завершения ее публикации в журнальной редакции, но к началу 2013 г. Редакция намерена издать ее в форме защищенной от копирования π-книги (*П*ортативной *И*нтерактивной книги), позволяющей, в частности, пополнять (многими способами) ее содержание по усмотрению читателя-пользователя.

В последующих выпусках нашего журнала публикуются: «Гл. II. Неравенства для моментов функций от двух случайных величин», «Гл. III. Неравенства для моментов функций от нескольких случайных величин», «Гл. IV. Неравенства для распределений случайных величин», «Гл. V. Неравенства для функции распределения функции от двух случайных величин»,

(Продолжение примечания см. на с. 864.)

§ 1.1. Неравенства для первого момента

$$\mathbf{M}\,Xf(X) \leqslant \mathbf{M}\,X \leqslant \mathbf{M}\,Xg(X),$$

если $X \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 1 \leqslant g(x)$ для $x \geqslant 0$.

К о м м е н т а р и й 1.1-1

П р и м е р. Пусть $f(x) = b\,(ax - (ax)^r)$, где $a > 0$, $b = r^{r/(r-1)}/(r-1)$, $r > 1$. Тогда $f(x) \leqslant 1$ для $x \geqslant 0$. Следовательно, $\mathbf{M}\,X \geqslant ab\,(\mathbf{M}\,X^2 - a^{r-1}\,\mathbf{M}\,X^{r+1})$. При $r = 3$ неравенство доказано в [1]. Если

$$a^{r-1} = \frac{\mathbf{M}\,X^2}{r\,\mathbf{M}\,X^{r+1}}, \quad \mathbf{M}\,X > 0,$$

то неравенство принимает вид $\mathbf{M}\,X^{r+1}(\mathbf{M}\,X)^{r-1} \geqslant (\mathbf{M}\,X^2)^r$ (частный случай неравенства Ляпунова).

1. *Berger B.* The fourth moment method. — In: Proceedings of the Second Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms. (ACM/SIGACT–SIAM Conference on Discrete Algorithms. San Francisco, CA, USA. January 28 - 30, 1991.) Philadelphia: SIAM, 1991, p. 373–383.

$$\mathbf{M}\,X \leqslant \mathbf{M}\,\frac{(X+a)^t}{(X+b)^{t-1}} - \frac{a^t}{b^{t-1}},$$

если $X \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

К о м м е н т а р и й 1.1-2

Неравенство — следствие оценки

$$x + \frac{a^t}{b^{t-1}} \leqslant \frac{(x+a)^t}{(x+b)^{t-1}},$$

выполняющейся при всех $x, a, b \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

1. *Мухтаров Х. Ш.* О некоторых неравенствах типа теорем вложения. — Матем. заметки, 1970, т. 8, в. 2, с.159–167.

«Гл. VI. Неравенства для вероятности принадлежности многомерной случайной величины заданному множеству», «Гл. VII. Неравенства для функции распределения или плотности сумм, произведений, членов вариационного ряда случайных величин», «Гл. VIII. Неравенства для функции распределения модуля или нормы суммы случайных величин», «Гл. IX. Неравенства для функции распределения максимума суммы случайных величин», «Гл. X. Неравенства для функции распределения максимума модуля или нормы суммы случайных величин», «Гл. XI. Отклонение функции распределения суммы случайных величин от конкретной функции распределения», «Гл. XII. Неравенства для характеристических функций», «Гл. XIII. Расстояния между законами распределения», «Гл. XIV. Неравенства для вероятностей различных событий», «Гл. XV. Неравенства для гамма-функции, факториалов, биномиальных и полиномиальных коэффициентов», «Гл. XVI. Смесь»

Издание каждой главы сопровождается списком используемых обозначений и полным списком литературы, упомянутой в отдельных «статьях-экспонатах» коллекции.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)\mathbf{P}\{X\geqslant a_{n+1}\}\leqslant \mathbf{M}\,X\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)\mathbf{P}\{X\geqslant a_n\},$$

если $X \geqslant 0$, $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X \geqslant a_n\} = 0$.

Комментарий 1.1-3

Используя равенство $\mathbf{M}\,X = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X \geqslant u\}\,du = \sum_{n=0}^\infty \int_{a_n}^{a_{n+1}} \mathbf{P}\{X \geqslant u\}\,du$ и монотонность функции $h(u) = \mathbf{P}\{(x \geqslant u\}$, получим оценки

$$(a_{n+1}-a_n)\mathbf{P}\{X\geqslant a_{n+1}\}\leqslant \int_{a_n}^{a_{n+1}}\mathbf{P}\{X\geqslant u\}\,du\leqslant (a_{n+1}-a_n)\mathbf{P}\{X\geqslant a_n\}$$

.

Неравенства используются (см., например [1, с. 89; 2]) для оценки $\mathbf{M}\,X = \mathbf{M}\,f(Y)$, где $Y \geqslant 0$, $f(x)$ неотрицательна и монотонно возрастает при $x \geqslant 0$. При этом $\mathbf{P}\{x \geqslant a_n\}$ заменяется на $\mathbf{P}\{Y \geqslant g(a_n)\}$, где $g(f(x)) \equiv 1$. Например, если $a_n = n$ для $n \in \mathbf{N}$, то приходим к оценке [3, с. 199]:

$$\mathbf{M}\,f(Y)\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\{Y\geqslant g(n)\}\leqslant 1+m+\sum_{n=m+1}^{\infty}h(n)\leqslant 1+m+\int_m^\infty h(t)\,dt,$$

где функция $h(x)$ монотонно убывает и при всех $n \in \mathbf{Z}_+$ удовлетворяет условию $\mathbf{P}\{Y \geqslant g(n)\} \leqslant h(n)$, а $m = \max\{n \in \mathbf{Z}_+ : h(n) \geqslant 1\}$.

1. *Chow Y. S.*, *Teicher H.* Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. N. Y. etc.: Springer, 1978, xv+455 p.
2. *Трубов Д. М.* Об усиленном законе больших чисел. — Лит. матем сб., 1982, т. XXII, в. 2, с. 189–193.
3. *von zur Gathen J.*, *Shoup V.* Computing Frobenius maps and factoring polynomials. — Comput. Complexity, 1992, v. 2, № 3, p. 187–224.

$$|\mathbf{M}\,X - M_X| \leqslant \sqrt{3\,\mathbf{D}\,X}$$

если X имеет унимодальное распределение, M_X — мода распределения случайной величины X (т. е. функция распределения $F(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$ выпукла при $x < M_X$ и вогнута при $x > M_X$).

Неравенство превращается в равенство только для равномерного или вырожденного распределений.

1. *Высочанский Д. Ф.*, *Петунин Ю. И.* Об одном неравенстве Гаусса для одновершинных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 2, с. 339–341.
2. *Basu S.*, *DasGupta A.* The mean, median, and mode of unimodal distributions: a characterization. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 2, с. 336–352.

§ 1.2. Неравенства для дисперсии

$$\mathbf{D}\,X \leqslant c\,\mathbf{M}\,|X|, \quad \mathbf{D}\,Y < \mathbf{M}\,Y,$$

если $\mathbf{P}\{|X| \leqslant c\} = 1$, $\mathbf{P}\{0 < Y < 1\} = 1$. Если $\mathbf{P}\{0 \leqslant Y \leqslant 1\} = 1$, то $\mathbf{D}\,Y \leqslant \mathbf{M}\,Y$.

1. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1986, 327 с. (См. с. 49–50).

$$\mathbf{D}\,X \leqslant |\,a\,b\,|,$$

если $a \leqslant X \leqslant b$, $\mathbf{M}\,X = 0$.

1. *Talagrand M.* The missing factor in Hoeffding's inequalities. — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 1995, v. 31, № 4, p. 689–702. (См. с. 699.)
2. *McDiarmid C.* Concentration. — In: Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics. /Ed. by M. Habib, C. McDiarmid, J. Ramirez-Alfonsin, B. Reed. Berlin etc.: Springer, 1998, p. 195–248. (См. с. 212.)

$$\mathbf{D}\,X \leqslant 2\left(\inf\left\{r\colon\ r > 0,\ \mathbf{M}\cosh\frac{X}{r} < 2\right\}\right)^2,$$

если $\mathbf{M}\,X = 0$.

1. *Бесклинская Е. П., Козаченко Ю. В.* Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви–Бакстера. — Теория вероятн. матем. статист., 1986, в. 35, с. 3–6.

$$\mathbf{D}\,X \geqslant \lambda^2\,k(k+1)\left(1 - \alpha\,\frac{2k+1}{3}\right),$$

если $\sup_{x\in\mathbf{R}}\mathbf{P}\{x \leqslant X \leqslant x + 2\lambda\} \leqslant \alpha$, $\lambda > 0$, $k \in \mathbf{N}$, $k < 1/\alpha \leqslant k+1$.

1. *Хенгартнер В., Теодореску Р.* Функции концентрации. М.: Наука, 1980, 173 с. (См. с. 27.)

§ 1.3. Неравенства для степенных моментов

$$\mathbf{M}\, X^t = t \int_0^\infty x^{t-1}\bigl(1 - F(x)\bigr)\, dx,$$

если $X \geqslant 0,\ \ t > 0.$

1. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1986, 327 с. (См. с. 52.)

$$\mathbf{M}\, X^t = \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(k^t - (k-1)^t\bigr)\, \mathbf{P}\{X \geqslant k\}$$

если $\mathbf{P}\{X \in \mathbf{Z}_+\} = 1,\ \ t > 0.$

1. *Франкен П.* Уточнение предельной теоремы для суперпозиции независимых процессов восстановления. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. VIII, в. 3, с. 341–348.

$$\mathbf{M}\, X^t \leqslant a^t + t \int_a^\infty x^{t-1}\, \mathbf{P}\{X \geqslant x\}\, dx,$$

если $X \geqslant 0,\ \ t > 0,\ \ a \geqslant 0.$

1. *Сунклодас Й.* Некоторые неравенства для распределений сумм m-зависимых случайных элементов. I. — Лит. матем. сб., 1983, т. XXIII, в. 2, с. 186–196.

$$\mathbf{M}\, X^t = |t| \int_0^\infty x^{t-1}\, F(x)\, dx,$$

если $X > 0,\ \ t < 0.$

1. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1986, 327 с. (См. с. 52.)

§ 1.4. Неравенства для абсолютных моментов

$$\mathbf{M}\,|X| \leqslant \frac{1}{2}\,(\mathbf{D}\,X + 1),$$

если $\mathbf{M}\,X = 0$.

1. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1986, 327 с. (См. с. 52.)

$$\mathbf{M}\,|X|^u \leqslant 1 + \mathbf{M}\,|X|^v, \quad \mathbf{M}\,|X-a|^p \leqslant 2^p\,\big(\mathbf{M}\,|X|^p + |a|^p\big),$$

если $a \in \mathbf{R}$, $p \geqslant 1$, $0 < u < v$.

1. *Козлов М. В.* Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990, 344 с. (См. с. 143–144.)

$$\mathbf{M}\,|X - \mathbf{M}\,X|^3 \leqslant \mathbf{M}\,|X|^3 + 3\,|\mathbf{M}\,X|\,\mathbf{M}\,X^2 \leqslant 4\,\mathbf{M}\,|X|^3,$$

если $\mathbf{M}\,|X|^3 < \infty$.

1. *Розовский Л. В.* Оценка снизу вероятностей больших уклонений суммы независимых случайных величин с конечными дисперсиями. — Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1999, т. 260, с. 218–239.

$$\mathbf{M}\,|X - \mathbf{M}\,X|^p \leqslant 2\,\mathbf{M}\,X^p, \quad \mathbf{M}\,|X-a|^p \leqslant \mathbf{M}\,X^p + a^p,$$

если $X \geqslant 0$, $p \geqslant 1$, $a \geqslant 0$.

Комментарий 1.4-1

Доказательство. Имеем: $\mathbf{M}|X{-}a|^p = \mathbf{M}(X{-}a)^p\,\mathbf{I}\{X > a\} + \mathbf{M}(a{-}X)^p\,\mathbf{I}\{a \geqslant X\} \leqslant \mathbf{M}\,X^p\mathbf{I}\{X > a\} + a^p \leqslant \mathbf{M}\,X^p + a^p$. При $a = \mathbf{M}\,X$ используем неравенство $(\mathbf{M}\,X)^p \leqslant \mathbf{M}\,X^p$ Ляпунова [1, с. 16].

1. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.

§ 1.5. Неравенства для семинвариантов

$$|\Gamma_k(X)| \leqslant C_k\,(k-1)!\,\mathbf{M}\,|X|^k,$$

если $k \in \mathbf{N}$, $C_k = 2^{k-1}$ при $\mathbf{M}\,X \neq 0$, $C_k = 1$ при $\mathbf{M}\,X = 0$.

1. *Бикялис А.* Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных. — Лит. матем. сб., 1967, т. VII, в. 4, с. 571–581.
2. *Якшявичюс Ш. В.* Об оценке производных сложной функции. — Лит. матем. сб., 1987, т. XXVII, в. 2, с. 394–412.

$$\begin{aligned}|\Gamma_k(X)| &\leqslant \mathbf{M}\,|X|^k + \mathbf{M}\,X^2\,\mathbf{M}\,|X|^{k-2}\big(a\,\lambda^{k-2}(k-1)! - 1\big)\\ &\leqslant a\,\lambda^{k-2}\,(k-1)!\,\mathbf{M}\,|X|^k, \qquad k = 5, 6, \ldots,\end{aligned}$$

$$|\Gamma_m(X)| \leqslant b\,\lambda^{m-2}(m-1)!\,\mathbf{M}\,|X|^m, \qquad m = 3, 4, \ldots,$$

если $\mathbf{M}\,X = 0$, $\lambda = 0,87245\ldots$ — корень уравнения $e^{1/x} - 1/x = 2$,

$$a = \frac{1}{2\lambda}\max\left\{1,\ \frac{|\Gamma_5(X)|}{12\,\lambda^2\mathbf{M}\,|X|^5}\right\}, \quad b = \frac{11}{24\,\lambda^3}.$$

1. *Розовский Л. В.* О коэффициентах ряда Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 1, с. 161–166.

$$|\Gamma_k(X) - \mathbf{M}\,X^k| \leqslant \frac{(k-1)!}{2}\,\mathbf{M}\,|X|^{k-2}\,\mathbf{D}\,X,$$

если $\mathbf{M}\,X = 0$, $\mathbf{M}\,X^{2m+1} < \infty$, $m, k \in \mathbf{N}$, $4 \leqslant k \leqslant 2m+3$.

При доказательстве используются равенства

$$\begin{aligned}\Gamma_2(X) - \mathbf{M}\,X^2 &= \Gamma_3(X) - \mathbf{M}\,X^3 = 0,\\ \Gamma_4(X) - \mathbf{M}\,X^4 &= -3\,(\mathbf{M}\,X^2)^2, \quad \Gamma_5(X) - \mathbf{M}\,X^5 = -10\;\mathbf{M}\,X^2\mathbf{M}\,X^3,\\ \Gamma_6(X) - \mathbf{M}\,X^6 &= -15\,\mathbf{M}\,X^2\mathbf{M}\,X^4 + 30\,(\mathbf{M}\,X^2)^3 - 10\,(\mathbf{M}\,X^3)^2,\\ \Gamma_{k+1}(X) - \mathbf{M}\,X^{k+1} &= \sum\nolimits_{i=2}^{k-1} C_k^i\,\mathbf{M}\,X^i\,\mathbf{M}\,X^{k+1-i}\\ &\quad - \sum\nolimits_{i=2}^{k-3} C_k^i\,\mathbf{M}\,X^i\big(\Gamma_{k+1-i}(X) - \mathbf{M}\,X^{k+1-i}\big) \quad \text{при} \quad k = 6, 7, \ldots\end{aligned}$$

1. *Розовский Л. В.* Оценка снизу остаточного члена в центральной предельной теореме для суммы независимых случайных величин с конечными моментами высокого порядка. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 1, с. 169–178.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П.* Введение в общую теорию множеств и функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, 411 с. См. с. 902.)
2. *Амбросимов А. С.*, *Тимашев А. Н.* Закон больших чисел для пропускной способности дискретных каналов без памяти со случайной дважды стохастической переходной матрицей. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1997, т. 4, в. 3, с. 319–320. (См. с. 926.)
3. *Антошевский З.*, *Бенткус Р.* Об асимптотике оценки спектральной функции стационарной гауссовской последовательности. — Лит. матем. сб., 1976, т. XVI, в. 2, с. 5–18. (См. с. 890.)
4. *Арак Т. В.*, *Зайцев А. Ю.* Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 174. (См. с. 877, 888, 937.)
5. *Арбеков И. М.* Оптимальная дискретизация наблюдений слабых сигналов при ограничении на скорость квантования. — Проблемы передачи информации, 1998, т. 34, № 1, с. 69–76. (См. с. 933.)
6. *Аренбаев Н. К.* О неравенствах для случайных векторов. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 3, с. 585–589. (См. с. 902.)
7. *Артемьев Г. С.*, *Гаврилов В. Б.*, *Фролов В. П.*, *Харитонов В. О.* Организация данных в кадровых информационных системах. — Автомат. и телемех., 1974, в. 10, с. 131–139. (См. с. 944.)
8. *Архангельский А. Н.* О нижних оценках вероятностей больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 2, с. 398–403. (См. с. 914.)
9. *Ахмедов С. А.* О неравномерных оценках в центральной предельной теореме для зависимых величин. — Лит. матем. сб., 1990, т. XXX, в. 4, с. 623–629. (См. с. 889.)
10. *Балтрунас А.* Асимптотическое поведение вероятностей односторонних больших уклонений. II. — Liet. Mat. Rink., 1996, v. 36, № 3, p. 271–280. (См. с. 922.)
11. *Беккенбах Э.*, *Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965, 276 с. (См. с. 908, 912.)
12. *Бенткус Р.*, *Рудзкис Р.* Об экспоненциальных оценках распределения случайных величин. — Лит. матем. сб., 1980, т. XX, в. 1, с. 15–30. (См. с. 878, 893.)
13. *Бенткус Р.*, *Рудзкис Р.*, *Сушинкас Ю.* О среднем оценок спектра однородного поля. — Лит. матем. сб., 1974, т. XIV, в. 3, с. 67–74. (См. с. 890.)
14. *Березин И. С.*, *Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1959, 464 с. (См. с. 939.)
15. *Бесклинская Е. П.*, *Козаченко Ю. В.* Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви–Бакстера. — Теория вероятн. матем. статист., 1986, в. 35, с. 3–6. (См. с. 872.)
16. *Бикялис А.* Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных. — Лит. матем. сб., 1967, т. VII, в. 4, с. 571–581. (См. с. 891.)
17. *Блох А. М.*, *Любич М. Ю.* Эргодичность транзитивных унимодальных преобразований отрезка. — Укр. матем. ж., 1989, т. 41, № 7, с. 985–988. (См. с. 908.)
18. *Борисов И. С.* Аппроксимация распределений статистик Мизеса с многомерными ядрами. — Сиб. матем. ж., 1991, т. 32, № 4, с. 20–35. (См. с. 943, 943.)
19. *Борисов И. С.*, *Скилягина Г. И.* Об асимптотическом разложении моментов гладких функций в центральной предельной теореме. — Сиб. матем. ж., 1996, т. 37, № 3, с. 519–525. (См. с. 920.)
20. *Боровков А. А.*, *Утев С. А.* Об одном неравенстве и связанной с ним характеризацией нормального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, в. 2, с. 209–218. (См. с. 903, 904.)
21. *Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: ИИЛ, 1961, 247 с. (См. с. 923.)
22. *Булинский А. В.*, *Колмогоров А. Н.* Линейные выборочные оценки сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 2, с. 241–251. (См. с. 931.)

213. *Radhakrishnan J.* Better bounds for threshold formulas. — In: Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science. (October 1–4, 1991.) Piscataway: IEEE Comput. Soc. Press, 1991, p. 314–323. (См. с. 925.)
214. *Sarwate D. V.* An upper bound on the aperiodic autocorrelation function for a maximal-length sequence. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1984, v. IT-30, № 4, p. 685–687. (См. с. 927.)
215. *Schachermayer W.*, *Schachinger W.* Is the a predictable criterion for mutual singularity of two probability measures on a filtered space? — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 101–110. (См. с. 896.)
216. *Serfling R. J.* Probabilitiy inequalities for the sum in sampling without replacement. — Ann. Statist., 1974, v. 2, № 1, p. 39–48. (См. с. 916.)
217. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communication. — Bell System Tech. J., 1948, v. 27, p. 379–423 (July), p. 623–656 (October). (См. с. 925.)
218. *Sikkena P. C.* Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen. — Numer. Math., 1961, № 3, p. 107–116. (См. с. 939.)
219. *Talagrand M.* The missing factor in Hoeffding's inequalities. — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 1995, v. 31, № 4, p. 689–702. (См. с. 872, 914, 918.)
220. *Toader Gh.* On Chebyshev's inequality for sequences. — Discrete Math., 1996, v. 161, № 1–3, p. 317–322. (См. с. 899, 900.)
221. *Tong Y. L.* Probability Inequalities in Multivariate Distributions. N. Y.: Academic Press, 1980, 239 p. (Ser. Probability and Mathematical Statistics.) (См. с. 878.)
222. *Unser M.*, *Aldroubi A.*, *Eden M.* Polynomial spline signal approximations: filter design and asymptotic eguivalence with Shannon's sampling theorem. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1992, v. IT-38, № 1, p. 95–103. (См. с. 870.)
223. *van Zwet W. R.* Mean, median, mode. II. — Statist. Neerlandica, 1979, v. 33, is. 1, p. 1–5. (См. с. 866.)
224. *von zur Gathen J.*, *Shoup V.* Computing Frobenius maps and factoring polynomials. — Comput. Complexity, 1992, v. 2, № 3, p. 187–224. (См. с. 865.)
225. *Xie Q.*, *Barron A. R.* Minimax redundancy for the class of memoryless sources. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1997, v. IT-43, № 2, p. 646–657. (См. с. 93.)
226. *Zieliński R.* A reparametrization on the symmetric α-stable distributions and their dispersive ordering. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 2, с. 410–411. (См. с. 885.)