ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2012

Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

ЗУБКОВ А. М., САЛИХОВ Н. П.

КОЛЛЕКЦИЯ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ГЛАВА III

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОМЕНТОВ ФУНКЦИЙ ОТ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН [1)]

Содержание

[1)] О т Р е д а к ц и и. Этой главой мы продолжаем публикацию журнальной редакции книги «Коллекция неравенств теории вероятностей».

Запланировано, что издание всей коллекции в виде единой книги будет осуществлено после завершения ее публикации в журнальной редакции, но к началу следующего года Редакция намерена издать ее в форме защищенной от копирования π-книги (*П*ортативной *И*нтерактивной книги), позволяющей, в частности, пополнять (многими способами) ее содержание по усмотрению читателя-пользователя.

Публикация журнальной редакции начата в шестом выпуске тома 18 (2011) («Гл. I. Неравенства для моментов функций от случайной величины») и первом выпуске тома 19 (2012) («Гл. II. Неравенства для моментов функций от двух случайных величин»). В последующих выпусках нашего журнала будут опубликованы: «Гл. IV. Неравенства для распределений случайных величин», «Гл. V. Неравенства для функции распределения функции от двух случайных величин», «Гл. VI. Неравенства для вероятности принадлежности многомерной случайной величины заданному множеству», «Гл. VII. Неравенства для функции распределения или плотности сумм, произведений, членов вариационного ряда случайных величин»,

(Продолжение примечания см. на обороте.)

§ 3.1. Неравенства для средних значений

$$\mathbf{M}\,Z = \mathbf{M}\,X\,\mathbf{M}\,Y,$$
$$\mathbf{D}Z = \mathbf{M}\,Y\,\mathbf{D}X + (\mathbf{M}\,X)^2\,\mathbf{D}Y,$$

если X и Y независимы, $Y \geqslant 0$, $\mathbf{M}\,X^2 < \infty$, $\mathbf{M}\,Y^2 < \infty$,

$$\mathbf{M}\,e^{itZ} = \int_0^\infty \left(\mathbf{M}\,e^{itX}\right)^u d\mathbf{P}\,\{Y \leqslant u\} \text{ при всех } t \in \mathbf{R}.$$

Если Y принимает только целые неотрицательные значения, то Z – сумма Y независимых случайных величин, имеющих такое же распределение, как X. В этом случае формулы для $\mathbf{M}\,Z$ и $\mathbf{D}Z$ известны; см., например, [1, гл. XII, §6, задача 1].

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 527 с.
2. *Рачев С. Т.*, *Рушендорф Л.* Модели и расчеты контрактов с опционами. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 150-190. (См. с. 169.)

$$\mathbf{M}\,\frac{S_k}{S_n} = \frac{k}{n}\ ,$$

если распределение положительного вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ инвариантно относительно перестановок координат, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. *Прохоров А. В.*, *Ушаков В. Г.*, *Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1986, 327 с. (См. с. 50.)

«Гл. VIII. Неравенства для функции распределения модуля или нормы суммы случайных величин», «Гл. IX. Неравенства для функции распределения максимума суммы случайных величин», «Гл. X. Неравенства для функции распределения максимума модуля или нормы суммы случайных величин», «Гл. XI. Отклонение функции распределения суммы случайных величин от конкретной функции распределения», «Гл. XII. Неравенства для характеристических функций», «Гл. XIII. Расстояния между законами распределения», «Гл. XIV. Неравенства для вероятностей различных событий», «Гл. XV. Неравенства для гамма-функции, факториалов, биномиальных и полиномиальных коэффициентов», «Гл. XVI. Смесь»

Издание каждой главы сопровождается списком используемых обозначений и полным списком литературы, упомянутой в отдельных «статьях-экспонатах» коллекции.

§ 3.2. Неравенства для дисперсий и ковариаций

$$\mathbf{D}\, S_n \geqslant \big(1 - \rho\,(n-1)\big) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i,$$

если $|\mathrm{cov}\,(X_i, X_j)| \leqslant \rho\,\sqrt{\mathbf{D}\, X_i \mathbf{D}\, X_j}$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

1. *Berman S. M.* Self-intersections and local nondeterminism of Gaussian processes. — Ann. Probab., v. 19, № 1, p. 160–191.

$$r\,\Delta(\mathbf{X}^{(n)}) \leqslant \mathbf{D}\, S_n - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i \leqslant R\,\Delta(\mathbf{X}^{(n)})$$

где $\Delta(\mathbf{X}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\mathbf{D}\, X_i})^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i$, $\mathbf{X}^{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$;

$$\Big|\mathbf{D}\, S_n - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i\Big| \leqslant \max\big\{|r|,\, |R|\big\}\Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mathbf{D}\, X_i}\Big)^2,$$

если $r\,\sqrt{\mathbf{D}\, X_i\, \mathbf{D}\, X_j} \leqslant \mathrm{cov}(X_i,\, X_j) \leqslant R\,\sqrt{\mathbf{D}\, X_i\, \mathbf{D}\, X_j}$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Комментарий 3.2-1

Оценка снизу в первом неравенстве следует из того, что

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\, S_n \;&=\; \mathbf{M}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\, X_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \mathrm{cov}(X_i,\, X_j)\\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} r\sqrt{\mathbf{D}\, X_i\, \mathbf{D}\, X_j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i + r\,\bigg(\Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mathbf{D}\, X_i}\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i\bigg).\end{aligned}$$

Аналогично доказывается оценка сверху. Последняя оценка следует из первых двух и того, что

$$0 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mathbf{D}\, X_i}\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\, X_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mathbf{D}\, X_i}\Big)^2.$$

§ 3.3. Неравенства для степенных моментов

$$\mathbf{M}\,X_1^2 - \frac{(\mathbf{M}\,X_1Y_1)^2}{\mathbf{M}\,Y_1^2} \geqslant \mathbf{M}\,X_0^2 - \frac{(\mathbf{M}\,X_0Y_0)^2}{\mathbf{M}\,Y_0^2},$$

если $\mathbf{M}\,\{X_1\,|\,X_0,Y_0\} = X_0$, $\mathbf{M}\,\{Y_1\,|\,X_0,Y_0\} = Y_0$, $\mathbf{P}\,\{Y_0=0\}<1$.

Комментарий 3.3-1

Доказательство (см. [1]). В силу того, что $\mathbf{M}\,Y_0^2>0$, справедливы соотношения $\mathbf{M}\,Y_1^2 = \mathbf{M}\,\mathbf{M}\,\{Y_1^2\,|\,X_0,Y_0\} \geqslant \mathbf{M}\,(\mathbf{M}\,\{Y_1\,|\,X_0,Y_0\})^2 = \mathbf{M}\,Y_0^2>0$, и оба знаменателя положительны. Далее, так как $\mathbf{M}\;\{X_1-\lambda\,Y_1\,|\,X_0,Y_0\} = X_0-\lambda\,Y_0$ при любом $\lambda\in\mathbf{R}$, то $\mathbf{M}\,\{(X_1-\lambda\,Y_1)^2\,|\,X_0,Y_0\} \geqslant (X_0-\lambda\,Y_0)^2$ и

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\,X_1^2 - \frac{(\mathbf{M}\,X_1Y_1)^2}{\mathbf{M}\,Y_1^2} &= \min_{\lambda\in\mathbf{R}}\mathbf{M}\,(X_1-\lambda\,Y_1)^2 = \min_{\lambda\in\mathbf{R}}\mathbf{M}\,\mathbf{M}\,\{(X_1-\lambda\,Y_1)^2\,|\,X_0,Y_0\}\\ &\geqslant \min_{\lambda\in\mathbf{R}}\mathbf{M}\;(X_0-\lambda Y_0)^2 = \mathbf{M}\,X_0^2 - \frac{(\mathbf{M}\,X_0Y_0)^2}{\mathbf{M}\,Y_0^2}.\end{aligned}$$

1. *Dekking F. M.* An inequality for pairs of martingales and its application to fractal image coding. — J. Appl. Probab., 1996, v. 33, № 4, p. 968–973.

$$\mathbf{M}\,XY_1Y_2 \geqslant \frac{\left(\mathbf{M}\,X^{1/(2t+1)}\right)^{2t+1}}{\left(\mathbf{M}\,Y_1^{-1/t}\right)^t\left(\mathbf{M}\,Y_2^{-1/t}\right)^t},$$

если $X>0$, $Y_1>0$, $Y_2>0$, $t>0$.

Частные случаи: при $X>0$, $Y>0$, $t>0$

$$\mathbf{M}\,XY \geqslant \frac{\left(\mathbf{M}\,X^{1/(2t+1)}\right)^{2t+1}}{\left(\mathbf{M}\,Y^{-1/t}\right)^t},$$

$$\mathbf{M}\,XY \geqslant \frac{1}{\left(\mathbf{M}\,X^{-1/t}\right)^t\left(\mathbf{M}\,Y^{-1/t}\right)^t}, \quad \mathbf{M}\,X \geqslant \frac{1}{\left(\mathbf{M}\,X^{-1/t}\right)^t}.$$

Комментарий 3.3-2

Методом индукции из неравенства можно вывести оценку

$$\mathbf{M}\,XY_1\cdots Y_n \geqslant \frac{\left(\mathbf{M}\,X^{1/t_n}\right)^{t_n}}{\left(\mathbf{M}\,Y_1^{-1/s_n}\right)^{s_n}\cdots\left(\mathbf{M}\,Y_n^{-1/s_n}\right)^{s_n}},$$

где $X>0, Y_1>0, Y_2>0,\ldots,Y_n>0$, $t_n=\frac{2t+1}{1-2(n-2)t}, s_n=\frac{t}{1-2(n-2)t}$, $2(n-2)t<1$, $n=2,3,\ldots$, $t>0$. Доказательство доставляет неравенство $\mathbf{M}\,XX_1X_2\ldots X_{n+1} \geqslant \left(\mathbf{M}\,(XX_1X_2\ldots X_n)^{1/(2t+1)}\right)^{2t+1}/\left(\mathbf{M}\,X_{n+1}^{-1/t}\right)^t$, в котором нужно положить $t=s_{n+1}$.

1. *Веретенников А. Ю.* О больших уклонениях в принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. II. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1991, т. 55, в. 4, с.91–715.

§ 3.4. Неравенства для абсолютных моментов

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}\mathbf{M}\,|X_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\,|X_i|^q\right)^{1/q}, \quad \text{если} \quad 0<p\leqslant q.$$

Комментарий 3.4-1

Неравенство следует из неравенства Ляпунова. Введя случайную величину Z, $\mathbf{P}(Z=i)=1/n$ для $i=1,2,\ldots,n$, не зависящую от $X_1,X_2,\ldots,X_n$, получим:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\,|X_i|^p\right)^{1/p} = (\mathbf{M}\,|X_Z|^p)^{1/p} \leqslant (\mathbf{M}\,|X_Z|^q)^{1/q} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\,|X_i|^q\right)^{1/q}.$$

При дополнительном условии $\mathbf{M}\,X_i=0$ для $i=1,2,\ldots,n$, неравенство доказывалось в [1].

1. *Dharmadhikari S. W.*, *Fabian V.*, *Jogdeo K.* Bounds on the moments of martingales. —- Ann. Math. Statist., 1968, v. 39, № 5, p. 1719–1723.
2. *Сунклодас Й.* Расстояние в метрике L_1 распределения суммы слабо зависимых случайных величин от нормальной функции распределения. — Лит. матем. сб., 1982, т. 22, в. 2, с. 170–187.

$$\begin{aligned}|\mathbf{M}\,X_1X_2-\mathbf{M}\,Y_1Y_2|^2 &\\ &\leqslant 3\big(\mathbf{M}\,|X_1|^2\mathbf{M}\,|X_2-Y_2|^2\\ &\quad+\mathbf{M}\,|X_2|^2\mathbf{M}\,|X_1-Y_1|^2+\mathbf{M}\,|X_1-Y_1|^2\mathbf{M}\,|X_2-Y_2|^2\big),\end{aligned}$$

если X_1,X_2,Y_1,Y_2 — комплекснозначные случайные величины, $\mathbf{M}\,X_k=\mathbf{M}\,Y_k=0$, $\mathbf{M}\,|X_k|^2<\infty$, $\mathbf{M}\,|Y_k|^2<\infty$ для $k=1,2$.

1. *Cramér H.* On some points of the theory of stochastic processes. — Sankhya, 1978, ser. A, 40, 2, p. 91–115.

$$\mathbf{M}\left|X_1-\frac{X_2+X_3}{\sqrt{2}}\right|^r \geqslant \frac{1}{2}\left(\mathbf{M}\,|X_1-X_2|^r+\mathbf{M}\left|\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}-\frac{X_3+X_4}{\sqrt{2}}\right|^r\right),$$

если X_1,X_2,X_3,X_4 — НОРСВ, $|X_1|^r<\infty$, $0<r<2$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $X_1\sim N\left(0,\sigma^2\right)$.

1. *Зингер А. А.*, *Какосян А. В.*, *Клебанов Л. Б.* Характеризация распределений средними значениями статистик и некоторые вероятностные метрики. — В. сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей./ Под. ред. В. М. Золотарева,1989, с. 47–55.

§ 3.5. Неравенства для средних значений выпуклых функций

$$\mathbf{M}\, g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geqslant g(\mathbf{M}\, X_1, \mathbf{M}\, X_2, \ldots, \mathbf{M}\, X_n),$$

если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M \subseteq \mathbf{R}^n$, $g(X_1, X_2, \ldots, x_n)$ — выпуклая функция на M.

Комментарий 3.5-1

Неравенство Иенсена для $\mathbf{M}\, g(X)$, где g — выпуклая функция на выпуклой оболочке носителя распределения X, можно уточнять, представляя распределение P случайной величины X в виде смеси $p_1 P_1 + p_2 P_2 + \cdots$ $(p_1, p_2, \ldots \geqslant 0$, $p_1 + p_2 + \cdots = 1)$ распределений $P_1, P_2, \ldots$ и применяя неравенство Иенсена отдельно к случайным величинам $X_1, X_2, \ldots$ с распределениями $P_1, P_2, \ldots,$ образующими смесь, а затем вычисляя математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей значения $g(\mathbf{M}\, X_1), g(\mathbf{M}\, X_2), \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$

Например, если X — вещественная случайная величина и при некотором $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{X < x\} = p_{-1}, \quad \mathbf{P}\{X = x\} = p_0, \quad \mathbf{P}\{X > x\} = p_1, \quad p_{-1} + p_0 + p_1 = 1, \\ \mathbf{M}\{X \mid X < x\} = M_{-1}, \quad \mathbf{M}\{X \mid X > x\} = M_1,\end{gathered} \tag{1}$$

то $\mathbf{M}\, g(X) \geqslant p_{-1} g(M_{-1}) + p_0 g(x) + p_1 g(M_1)$ и в силу выпуклости $g(x)$

$$p_{-1} g(M_{-1}) + p_0 g(x) + p_1 g(M_1) \geqslant g(p_{-1} M_{-1} + p_0 x + p_1 M_1) = g(\mathbf{M}\, X).$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие такое же распределение, как X, а $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — выпуклая функция, то в обозначениях (1)

$$\mathbf{M}\, g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = -1}^{1} p_{-1}^{n_{-1}} p_0^{n_0} p_1^{n_1} g(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}), \tag{2}$$

где n_{-1}, n_0, n_1 — количества чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$, равных -1, 0 и 1 соответственно.

Рассмотрим пример применения формулы (2) (ср. [1, лемма 4]). Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n \geqslant 0$ независимы и одинаково распределены, а выпуклая функция $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ такова, что $g(cX_1, X_2, \ldots, cX_n) \geqslant h(c) g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для всех $c > 0$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$. Тогда при $x = 0$ имеем $p_{-1} = 0$ и, полагая $y_t(A) = \mathbf{I}, \{t \in A\} M_1$, из (2) получим

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\, g(X_1, X_2, \ldots, X_n) &\geqslant \sum_{A \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} p_1^{|A|} (1 - p_1)^{n-|A|} g(y_1(A), y_2(A), \ldots, y_n(A)) \\ &\geqslant h(M_1) \mathbf{M}\, g(\mathbf{I}\{X_1 > 0\}, \mathbf{I}\{X_2 > 0\}, \ldots, \mathbf{I}\{X_n > 0\}).\end{aligned}$$

1. *Шнейберг И. Я.* Иерархические последовательности случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 1, с. 147–152.
2. *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 343 с. (см. с. 177-178).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. Г.* О допустимых непараметрических оценках плотности вероятности и ее производных. — Проблемы передачи информации, 1994, т. 30, № 2, с. 36–41. (См. с. 177.)
2. *Амбросимов А. С.*, *Тимашев А. Н.* Закон больших чисел для пропускной способности каналов без памяти со случайной переходной матрицей. — Проблемы передачи информации, 1995, т. 31, № 3, с. 24–34. (См. с. 179.)
3. *Арак Т. В.* О скорости сходимости распределения максимума последовательных сумм независимых случайных величин. — Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 1, с. 11–13. (См. с. 115.)
4. *Басаликас А.* О расстоянии между распределениями сумм случайных полиномиальных форм. — Liet. matem. rink., 1992, v. 32, № 4, p. 443–453. (См. с. 131.)
5. *Бахтин В. И.* Функциональная центральная предельная теорема для преобразованных решений многомерного уравнения Бюргерса со случайными данными. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, в. 46, в. 3, с. 427–448. (См. с. 103.)
6. *Бахтин В. И.* Функциональная центральная предельная теорема для преобразованных решений многомерного уравнения Бюргерса со случайными данными. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, в. 46, в. 3, с. 427–448. (См. с. 108.)
7. *Бенткус Р.*, *Тарасявичюс П.* Некоторые оценки семиинвариантов m-зависимых и ρ-перемешанных стационарных процессов. — Лит. матем сб., 1991, т. 21, в. 1, с. 29–38. (См. с. 111.)
8. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. 4. М.: Наука, 1964, 577 с. (См. с. 103, 124, 164.)
9. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей. М.-Л.: Гостехиздат, 1946, 556 с. (См. с. 120.)
10. *Бобков С. Г.* Некоторые экстремальные свойства распределения Бернулли. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 877–884. (См. с. 139.)
11. *Борисов И. С.* Аппроксимация распределений гладких функционалов от сумм независимых случайных элементов в банаховых пространствах. — В сб.: Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Труды Ин-та матем. Сибирского отделения АН СССР, 1989, в. 13, с. 7–40. (См. с. 136.)
12. *Борисов И. С.* Аппроксимация распределений статистик Мизеса с многомерными ядрами. — Сиб. матем. ж., 1991, т. 32, № 4, с. 20–35. (См. с. 181.)
13. *Борисов И. С.*, *Бакланов Е. А.* Вероятностные неравенства для обобщенных L-статистик. — Сиб. матем. журнал, 2001, т. 42, № 2, с. 258–274. (См. с. 179.)
14. *Боровков А. А.* Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания II. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 3, с. 409–436. (См. с. 125, 162.)
    Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 431 с. (См. с. 148, 160.)
15. *Браверман М. Ш.* О последовательностях независимых устойчивых случайных величин с различными показателями. — Теория вероятн. матем. статист., 1991, в. 44, с. 25-31. (См. с. 181.)
16. *Браверман М. Ш.* Статистический интеграл как оператор в пространстве L_p. — Теория вероятн. матем. статист., 1984, в. 30, с. 15–25. (См. с. 180.)
17. *Ватутин В. А.*, *Топчий В. А.* Максимум критических процессов Гальтона–Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 21–34. (См. с. 141.)
18. *Вахания Н. Н.*, *Тариеладзе В. И.*, *Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с. (См. с. 143, 144.)
19. *Веретенников А. Ю.* О больших уклонениях в принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. II. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1991, т. 55, в. 4, с.91–715. (См. с. 104.)

152. *Latala R.*, *Oleszkiewicz K.* A note on sums of independent uniformly distributed random variables. — Colloq. Math., 1995, v. 68, № 2, p. 197–206. (См. с. 130, 133, 179.)
153. *Lorden G.* On excess over the boundary. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, № 2, p. 520–527. (См. с. 159.)
154. *Margolin B. H.*, *Mosteller F.* The expected coverage to the left of the i-th order statistic for arbitrary distributions. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, № 2, p. 644-647. (См. с. 167.)
155. *Newman C. M.* An extension of Khintchine's inequality. — Bull. Amer. Math. Soc., 1975, v. 81, № 5, p. 913–915. (См. с. 108.)
156. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. New-York-London: Acad. press, 1967, 276 p. (См. с. 135.)
157. *Peškir G.* Maximal inequalities of Kahane-Khintchine's type in Orlicz spaces. — Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society, 1994, v. 115, p. 175–190. (См. с. 153, 154.)
158. *Prakasa Rao B. L. S.* Hoeffding identity, multivariance and multicorrelation. — Statistics, v. 32, p. 13–29. (См. с. 105.)
159. *Prakasa Rao B. L. S.* On some inequalities of Chernoff-type. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 2, с. 434-439. (См. с. 182.)
160. *Schur I.* Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie. — Sitzunsber. Berlin. Math. Ges. 1923, B. 22, S. 9–20. (См. с. 99.)
161. *Serfling R. J.* Probabilitiy inequalities for the sum in sampling without replacement. — Ann. Statist., 1974, v. 2, 1, c. 39–48. (См. с. 184.)
162. *Shiu E. S. W.* On Gerber's fun. — Scand. Actuar. J., 1989, № 2, p. 65–68. (См. с. 153.)
163. *Spitzer F. L.* A combinatorial lemma and its application to probability theory. — Trans. Amer. Math. Soc., 1956, v. 82, № 2, p. 323–339. (Русский перев.: *Спицер Ф.* Комбинаторная лемма и ее приложения к теории вероятностей. — В сб. переводов: Математика, 1964, т. 8, № 4, с. 135–150.) (См. с. 168.)
164. *Sunklodas J.* Probability inequalities for sums of weakly dependent random variables. — Liet. matem. rink., 1992, v. 32, № 3, p. 426–434. (См. с. 106.)
165. *Tong Y. L.* Probability Inequalities in Multivariate Distributions. N. Y.: Academic Press, 1980, v. XIII, 239 p. (См. с. 145.)
166. *Uspensky J. V.* Introduction to mathematical probability. New York–London: McGraw-Hillbook, 1937, v. IX, 411 p. (См. с. 178.)
167. *Venkatesh S. S.*, *Franklin J.* How much information can one bit of memory retain about a Bernoulli sequences? — IEEE Trans. Inform. Theory, 1991, v. IT-37, № 6, p. 1595–1604. (См. с. 99.)
168. *Volodin A. I.* On the Marzinkiewicz weak laws of large numbers in Banach spaces. — In: Proceedings of the Third Finnisch-Soviet Symposium of Probability Theory and Mathematical Statistics (Turku, Aug. 13–16, 1991). Turku: Akademi,1993, p. 269–286. (См. с. 134.)
169. *Wald A.* On cumulative sums of random variables. — Ann. Math. Statist., 1944, v. 15, № 1, p. 285–287. (См. с. 160.)
170. *Wang G.* Sharp inequalities for the conditional square function of a martingal. — Ann. Probab., 1991, v. 19, № 4, p. 1679–1688. (См. с. 135.)
171. *Whittle P.* Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent variables. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. V, в. 3, с. 331–334. (См. с. 126, 128.)
172. *Wichura M. J.* Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, № 2, p. 681–687. (См. с. 171.)