ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

ЗУБКОВ А. М., САЛИХОВ Н. П.

КОЛЛЕКЦИЯ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ГЛАВА V

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН [1)]

Содержание

[1)] О т Р е д а к ц и и. Этой главой мы продолжаем публикацию журнальной редакции книги «Коллекция неравенств теории вероятностей».

Запланировано, что издание всей коллекции в виде единой книги будет осуществлено после завершения ее публикации в журнальной редакции, но к началу следующего года Редакция намерена издать ее в форме защищенной от копирования π-книги (*П*ортативной *И*нтерактивной книги), позволяющей, в частности, пополнять (многими способами) ее содержание по усмотрению читателя-пользователя.

Публикация журнальной редакции начата в шестом выпуске тома 18 (2011) («Гл. I. Неравенства для моментов функций от случайной величины») и первых трех выпусках тома 19 (2012) («Гл. II. Неравенства для моментов функций от двух случайных величин», «Гл. III. Неравенства для моментов функций от нескольких случайных величин», «Гл. IV. Неравенства для распределений случайных величин»). В последующих выпусках нашего журнала будут опубликованы: «Гл. VI. Неравенства для вероятности принадлежности многомерной случайной величины заданному множеству», «Гл. VII. Неравенства для функции распределения или плотности сумм, произведений, членов вариационного ряда случайных величин», «Гл. VIII. Неравенства для функции распределения модуля или нормы суммы случайных величин», «Гл. IX. Неравенства для функции распределения максимума суммы случайных величин», «Гл. X. Неравенства для функции распределения максимума модуля или нормы суммы случайных величин», «Гл. XI. Отклонение функции распределения суммы случайных величин от конкретной функции распределения», «Гл. XII. Неравенства для характеристических функций», «Гл. XIII. Расстояния между законами распределения», «Гл. XIV. Неравенства для вероятностей различных событий», «Гл. XV. Неравенства для гамма-функции, факториалов, биномиальных и полиномиальных коэффициентов», «Гл. XVI. Смесь».

Издание каждой главы сопровождается списком используемых обозначений и полным списком литературы, упомянутой в отдельных «статьях-экспонатах» коллекции.

§ 5.1. Неравенства для распределений двумерных случайных векторов

$$\sup_{A \subseteq \mathcal{B}} \Big| \mathbf{P}\{X \in A\} - \mathbf{P}\{Y \in A\} \Big| \leqslant \mathbf{P}\{X \neq Y\},$$

если $\mathcal{B}$ — множество всех борелевских множеств на $\mathbf{R}$.

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 431 с. (См. с. 125.)

$$\mathbf{P}\{X \geqslant Y\} \geqslant \sup_{x \in \mathbf{R}} \big\{ \mathbf{P}\{Y \leqslant x\} - \mathbf{P}\{X < x\} \big\}.$$

1. *Логунов П. Л.* Об оценках вероятностей доминирования при фиксированных маргинальных распределениях. — В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. /Под ред. В. М. Золотарева, В. В. Калашникова. М.: ВНИИСИ, 1989, с. 85–87.

$$\mathbf{P}\{|X_1 - X_2| > t\} \leqslant \mathbf{P}\left\{ \max\{|X_1|, |X_2|\} > \frac{t}{2} \right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{ |X_1| > \frac{t}{2} \right\} + \mathbf{P}\left\{ |X_2| > \frac{t}{2} \right\}.$$

Неравенства справедливы также для величин, принимающих значения в банаховом пространстве. Для независимых X_1 и X_2 из суммы в правой части можно вычесть произведение слагаемых.

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с. (См. с. 176.)
2. *Hoffman-Jorgensen J.* Sums of independent Banach space valued random variables. — Studia Math., 1974, v. 52, № 2, p. 158–186.

$$\mathbf{P}\{|X_1| \leqslant x_1,\ |X_2| \leqslant x_2\} \leqslant \mathbf{P}\{|X_1 + X_2| \leqslant x_1 + x_2\}.$$

1. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1986, 327 с. (См. с. 68.)

§ 5.2. Неравенства для распределений двумерных гауссовских случайных векторов

$$\mathbf{P}\{X \leqslant x,\, Y \leqslant y\}$$
$$= \frac{e(x,y)+\Phi(x)+\Phi(y)}{2} - T\Big(x, \frac{y-rx}{x\sqrt{1-r^2}}\Big) - T\Big(y, \frac{x-ry}{y\sqrt{1-r^2}}\Big),$$

если (X,Y) — такой гауссовский случайный вектор, что $\mathbf{M}\,X=\mathbf{M}\,Y=0$, $\mathbf{M}\,X^2=\mathbf{M}\,Y^2=1$ и $\mathbf{M}\,XY=r$, $e(x,y)=0$ при $x\,y>0$ и при $x\,y=0$, $x+y\geqslant 0$, в остальных случаях $e(x,y)=-1$, $x,y\in\mathbf{R}$;

$$T(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_u^\infty \int_0^{vx} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dy\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^v \frac{e^{-u^2(1+x^2)/2}}{1+x^2}\,dx.$$

Функция Оуэна $T(u,v)$ удовлетворяет соотношениям

$$T(u,v)+T\Big(uv,\frac{1}{v}\Big) = \frac{1}{4}-\Phi(uv)\,\Phi(u) \text{ при } u,v\geqslant 0,$$
$$T(u,v) = -T(u,-v) = T(-u,v), \quad T(u,0)=0,$$
$$T(u,\infty) = \frac{1-2\,\Phi(|u|)}{4}, \quad T(0,v) = \frac{1}{2\,\pi}\operatorname{arctg} v, \quad T(u,1) = \frac{1-4\,\Phi^2(u)}{8}.$$

1. *Смирнов Н. В., Большев Л. Н.* Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения. М.: Изд-во АН СССР, 1962, 204 с. (См. с. 4–6.)

$$\mathbf{P}\{X>0,\, Y>0\} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\,\arcsin r,$$

если (X,Y) — такой гауссовский случайный вектор, что $\mathbf{M}\,X=\mathbf{M}\,Y=0$, $\mathbf{M}\,X^2=\mathbf{M}\,Y^2=1$ и $\mathbf{M}\,XY=r$.

1. *Bryc W.* The normal distribution. Characterizations with applications. — Lect. Notes Statist., 1995, v. 100, 139 p. (См. с. 29, 38.)

§ 5.3. Неравенства для распределений пар независимых случайных величин

$$Q_{X+Y}(x) \leqslant \min\big\{Q_X(x),\ Q_Y(x),\ Q_X(x)Q_Y(x) + (1-Q_X(x))\,(1-Q_Y(x))\big\},$$

$$Q_X(x)Q_Y(y) \leqslant Q_{X+Y}(x+y), \quad Q_{X+Z}(x) \leqslant Q_X(2a+x)Q_Z(x),$$

если X, Y, Z независимы, $|Z| \leqslant a$ при некотором $a > 0$, $x, y \geqslant 0$,

$$Q_X(u) = \sup_{t\in\mathbf{R}} \mathbf{P}\{t \leqslant X \leqslant t+u\}.$$

1. *Хенгартнер В.*, *Теодореску Р.* Функции концентрации. М.: Наука, 1980, 173 с. (См. с. 52.)
2. *Арак Т. В.*, *Зайцев А. Ю.* Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 174. (См. с. 47.)
3. *Прохоров А. В.*, *Ушаков В. Г.*, *Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1986, 327 с. (См. с. 64–65.)
4. *Рогозин Б. А.* Компактность и функции концентрации сверток распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 81–97. (См. с. 92.)

$$Q(\mathbf{X}+\mathbf{Y}, A) \leqslant \min\{Q(\mathbf{X}, A),\ Q(\mathbf{Y}, A)\},$$

если $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — независимые случайные векторы в $\mathbf{R}^k$,

$$Q(\mathbf{X}, A) = \sup_{\mathbf{y}\in\mathbf{R}^k} \mathbf{P}\{\mathbf{X} - \mathbf{y} \in A\}, \qquad A \subset \mathbf{R}^k.$$

1. *Паулаускас В. И.* Функции концентрации конечномерных и бесконечномерных случайных векторов. — Лит. матем. сб., 1973, т. XIII, в. 1, с. 137–156.

$$\mathbf{P}\{X \geqslant \max\{Y, x\}\} \geqslant \mathbf{P}\{X \geqslant Y\}\,\mathbf{P}\{X \geqslant x\},$$

если X, Y независимы, $x \in \mathbf{R}$.

1. *Зубков А. М.*, *Севастьянов Б. А.*, *Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989, 317 с. (См. с. 96.)

§ 5.4. Неравенства для распределений двух одинаково распределенных случайных величин

$$\mathbf{P}\left\{|X_1+X_2|\geqslant x\right\}\geqslant\begin{cases}\dfrac{1}{2}-(1-p)^2 & \text{при}\quad p\geqslant\dfrac{1}{2},\\ p^2 & \text{при}\quad p\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

если X_1, X_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины, $p=\mathbf{P}\left\{|X_1|\geqslant x\right\}$, $x>0$.

1. *Катона Г. О. Х.* Неравенства для распределения длины суммы случайных векторов. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 3, с. 466–481.

$$\mathbf{P}\left\{|a\,X_1+b\,X_2|\geqslant\alpha\right\}\geqslant f\big(\mathbf{P}\left\{|X_1|\geqslant\beta\right\}\big),$$

если X_1, X_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины, $a,b,\alpha,\beta>0$,

$$f(p)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad a+b<\dfrac{\alpha}{\beta},\\ \dfrac{p^2}{2}, & \text{если}\quad a<\dfrac{\alpha}{\beta}\leqslant a+b,\\ \dfrac{6\,p-p^2-1}{8}, & \text{если}\quad p\geqslant\dfrac{1}{3},\ C_1<\dfrac{\alpha}{\beta}\leqslant a,\\ p^2, & \text{если}\quad p\leqslant\dfrac{1}{3},\ C_1<\dfrac{\alpha}{\beta}\leqslant a,\\ \dfrac{1}{2}-(1-p)^2, & \text{если}\quad p\geqslant\dfrac{1}{2},\ C_0<\dfrac{\alpha}{\beta}\leqslant C_1,\\ p^2, & \text{если}\quad p\leqslant\dfrac{1}{2},\ C_0<\dfrac{\alpha}{\beta}\leqslant C_1,\end{cases}$$

где $C_0=a(a+b)/(a+2b)$, $C_1=(a^2+b^2)/(a+b)$.

1. *Сидоренко А. Ф.* Экстремальные оценки вероятностных мер и их комбинаторная природа. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1982, т. 46, в. 3, с. 535–568.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арак Т. В.*, *Зайцев А. Ю.* Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 174. (См. с. 511.)
2. *Архаров Л. В.* О неравенстве Чебышева для двумерного случая. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, в. 2, с. 353–359. (См. с. 514.)
3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 431 с. (См. с. 499.)
4. *Булдыгин В. В.*, *Солнцев С. А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. Киев: Наукова Думка, 1989, 186 с. (См. с. 516.)
5. *Вронский М. А.* Скорость сходимости в УЗБЧ для ассоциированных последовательностей и полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 439–455. (См. с. 501.)
6. *Гапошкин В. Ф.* О скорости приближения к нормальному закону распределений взвешенных сумм лакунарных рядов. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. XIII, в. 3, с. 445–461. (См. с. 501.)
7. *Гефдинг В.* Об одной теореме В. М. Золотарева. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. IX, в. 1, с. 96–99. (См. с. 514.)
8. *Джнейд М. О.* О предельном распределении максимума некоторых зависимых случайных величин. — Теория вероятн. матем. статист., 1987, в. 37, с. 36–39. (См. с. 500.)
9. *Зигель Г.* Компактность последовательности сумм независимых величин со значениями в гильбертовом пространстве. — Лит. матем. сб., 1981, т. XXI, в. 4, с. 123–136. (См. с. 518.)
10. *Зубков А. М.*, *Севастьянов Б. А.*, *Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989, 317 с. (См. с. 511, 516.)
11. *Карлин С.*, *Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука , 1976, 568 с. (См. с. 505, 512.)
12. *Катона Г. О. Х.* Неравенства для распределения длины суммы случайных векторов. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 3, с. 466–481. (См. с. 517, 520, 521.)
13. *Клесов О. И.* Сходимость почти наверное кратных рядов независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 1, с. 68–83. (См. с. 518.)
14. *Конаков В. Д.* Полные асимптотические разложения для максимального уклонения эмпирической функции плотности. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, в. 3, с. 495–509. (См. с. 502.)
15. *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистические методы прогнозирования надежности сложного программного обеспечения. — Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. киберн., 1992, в. 3, с. 3–21. (См. с. 513.)
16. *Круглов В. М.* Дополнительные главы теории вероятностей. М.: Высшая школа, 1984, 264 с. (См. с. 503, 516.)
17. *Круглов В. М.*, *Королев В. Ю.* Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990, 269 с. (См. с. 515.)
18. *Логунов П. Л.* Об оценках вероятностей доминирования при фиксированных маргинальных распределениях. — В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. /Под ред. В. М. Золотарева, В. В. Калашникова. М.: ВНИИСИ, 1989, с. 85–87. (См. с. 499.)
19. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с. (См. с. 518.)
20. *Ляшенко Н. Н.*, *Никулин М. С.* О машинном умножении независимых случайных величин. — В сб.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. В. 1. /Под ред. З. И. Боревича, В. В. Петрова. Л.: ЛГУ, 1986, с. 178–185. (См. с. 502, 503.)

43. *Сэвидж И. Р.* Вероятностные неравенства чебышевского типа. — В сб.: Математика, 1962, т. 6, в. 4, с.71–95. (См. с. 505.)
44. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 527 с. (См. с. 508.)
45. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с. (См. с. 499, 512, 513.)
46. *Хенгартнер В.*, *Теодореску Р.* Функции концентрации. М.: Наука, 1980, 173 с. (См. с. 511, 518.)
47. *Юкнявичене Д.* Центральная предельная теорема в пространстве $D[0,1]$. — Лит. матем. сб., 1985, т. XXV, в. 3, с. 198–204. (См. с. 501.)
48. *Янушкявичюс Р. В.* О почти независимых в равномерной метрике статистиках $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$. — В. сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. /Под. ред. В. В. Калашникова, В. М. Золотарева, М.: ВНИИСИ, 1985, с. 160–179. (См. с. 504.)
49. *Янушкявичюс Р. В.* Устойчивость характеризаций вероятностных распределений. Вильнюс: Мокслас, 1991, 248 с. (См. с. 504.)
50. *Barbour A.D.*, *Holst L.*, *Janson S.* Poisson Approximation. Oxford: Clarendon Press, 1992, 277 p. (См. с. 509.)
51. *Birnbaum Z. W.* On random variables with comparable peakedness. — Ann. Math. Statist., 1948, v. 19, № 1, p. 7681. (См. с. 515.)
52. *Bryc W.* The normal distribution. Characterizations with applications. — Lect. Notes Statist., 1995, v. 100, 139 p. (См. с. 507.)
53. *Hoffman-Jorgensen J.* Sums of independent Banach space valued random variables. — Studia Math., 1974, v. 52, № 2, p. 158–186. (См. с. 499.)
54. *Merkle M.*, *Petrović L.* On Schur-covexity of some distribution functions. — Publ. l'inst. Math., nouvelle série, 1994, № 56 (70), p. 111–118. (См. с. 519.)
55. *Philipp W.* A functional law of the iterated logarithm for empirical distribution functions of weakly dependent random variables. — Ann. Probab., 1977, v. 5, № 3, p. 319–350. (См. с. 506.)
56. *Pickands J. III* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 145, p. 51–73. (См. с. 508.)
57. *Samuel-Cahn E.* Is the Simes improved Bonferroni procedure conservative? — Biometrika, 1996, v. 83, № 4, p. 928–933. (См. с. 509.)
58. *Tong Y. L.* Probability Inequalities in Multivariate Distributions. N. Y.: Academic Press, 1980, XIII + 239 p. (См. с. 510.)
59. *Zhao L. C.*, *Krishnaian P. R.*, *Chen X. R.* Almost sure L_r norm convergence for data-based histogram density estimates. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 2, с. 391–397. (См. с. 512.)