ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

БЕЗРУЧКО Л. В., *БЕЛЯВСКИЙ Г. И.*

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ БЕЗАРБИТРАЖНЫХ ЦЕН ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОД УПРАВЛЕНИЕМ СУБОРДИНИРОВАННОГО ПРОЦЕССА ЛЕВИ

Содержание

§ 1. Введение

С началом первых торгов на финансовых рынках появились работы Р. Мертона, Ф. Блэка и М. Шоулза [2], [8] по расчету справедливых цен опционов. В этих работах было установлено, что справедливые цены опционов являются функционалами на траекториях моделирующих случайных процессов. В классических работах в качестве моделирующих процессов использовались гауссовские процессы. Вычисление справедливой цены опциона в модели Блэка–Шоулса сводится к решению уравнения в частных производных с начальными или краевыми условиями или со свободной границей. Это уравнение, которое в литературе по стохастической финансовой математике называется уравнением Блэка–Шоулса, является обратным уравнением Колмогорова. Непрерывные траектории и тонкий хвост гауссовского распределения делают модель Блэка–Шоулса нереалистичной. Это обстоятельство привело к появлению с конца прошлого века более реалистических моделей, в которых применяются негауссовские процессы Леви. В новых моделях появилась возможность моделировать скачки и более реалистично оценивать риски. Вычисление функционалов на траекториях негауссовских процессов Леви связано с решением интегро-дифференциального уравнения

Колмогорова (обобщенного уравнения Блэка–Шоулса). Решение интегро-дифференциального уравнения Колмогорова связано с аналитическими и вычислительными трудностями [6]. Методы вычисления безарбитражных цен опционов включают в себя: конечно-разностные схемы; метод линий; методы, использующие преобразование Лапласа и преобразование Фурье; методы, использующие факторизацию Винера–Хопфа; методы Монте-Карло [7], [9].

Широкий класс процессов Леви может быть получен на основе субординации гауссовского процесса Леви [1]. К этим процессам, например, относятся широко применяемые в финансовой математике процессы Variance Gamma (VG) и Normal inverse Gaussian (NIG).

Процесс VG имеет вид $X_t = W(Z_t)$, где W есть стандартное броуновское движение, Z_t — гамма-субординатор с плотностью $f_{Z_t}(x) = b^{at}x^{at-1}e^{-bx}/\Gamma(at)$. Плотность Леви процесса VG есть $g_\nu(x) = a|x|^{-1}(e^{\sqrt{2b}x}\mathbf{I}_{(-\infty,0)}(x)+e^{-\sqrt{2b}x}\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x))$, где $a>0$, $b>0$. Заметим, что процесс VG является частным случаем более широкого класса процессов CGMY.

Процесс NIG имеет вид $X_t = C(Z_t)+\alpha t$, где $C_t = \beta t + W_t$, $Z_t = \inf\{s \geqslant 0\colon\ W_s + \gamma s = \delta t\}$ есть обратный гауссовский субординатор с характеристической экспонентой $\mu_Z(u) = \delta(\sqrt{2u+\gamma^2}-\gamma)$.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим (B,S)-рынок

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \quad B_t = e^{rt}, \tag{1}$$

где X_t $(t\in[0,T])$ — процесс Леви с семейством одномерных законов распределения $P_t(dx) = \mathbf{P}\{X_t \in dx\}$. Пусть финансовое обязательство $f(x)$ таково, что $\mathbf{E}\,|f(S_t)| = \int_{-\infty}^{\infty}|f(S_0e^x)|P_t(dx) < \infty$ для любого $t\in[0,T]$. При этом предположении существуют безарбитражные цены

$$V(T-t,x) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}^Q(f(S_0e^{X_{T-t}+x})), \qquad t\in[0,T], \tag{2}$$

где Q — одна из мартингальных мер, эквивалентных исходной мере. Если процесс X_t не является гауссовским процессом Леви, то эквивалентная мартингальная мера, если она существует, может быть не единственной. Пусть Z_t — процесс плотности, т. е. $Q(dx) = Z_TP(dx)$ и $Z_t = \mathbf{E}^P(Z_T\,|\,F_t)$, F_t — естественная фильтрация. Процесс плотности может быть найден при помощи преобразования Эшера $Z_T = e^{aX_T}/\mathbf{E}\,e^{aX_T}$, $Z_t = e^{aX_t}/\mathbf{E}\,e^{aX_t}$. Подробное описание преобразования Эшера можно найти в [10]. Параметр a находится из условия, что процесс S_tZ_t/B_t есть мартингал. Относительно параметра a возникает уравнение

$$\eta_X(-i(a+1)) - \eta_X(-ia) = r. \tag{3}$$

Условия существования решения уравнения (3) рассмотрены в работе [4]. Пусть $\overline{a}$ — решение уравнения (3), тогда формула (2) приобретает вид

$$V(T-t,x) = e^{-(r+\eta_X(-i\overline{a}))(T-t)-\overline{a}x}\mathbf{E}\,(e^{\overline{a}(X_{T-t}+x)}f(S_0e^{X_{T-t}+x})). \qquad (4)$$

При обозначениях $\overline{V}(T-t,x) = V(T-t,x)\,e^{(r+\eta_X(-i\overline{a}))(T-t)+\overline{a}x}$, $g(x) = e^{\overline{a}x}f(S_0e^x)$, $\tau = T-t$ уравнение (4) приобретает вид

$$\overline{V}(\tau,x) = \mathbf{E}\,g(X_\tau + x). \qquad (5)$$

Задача (5) является основной исследуемой задачей.

Красная линия соответствует справедливой цене в следующей модели Блэка–Шоулза: $S_t = S_0 e^{(\alpha+\beta)t+W_t}$, $B_t = e^{rt}$, т. е.

$$\begin{aligned} C_{BS} = {} & S_0 \Phi\biggl(\frac{1}{\sqrt{T}}\biggl(\ln\frac{S_0}{K} + T(r+1/2)\biggr)\biggr) \\ & - K e^{-rT} \Phi\biggl(\frac{1}{\sqrt{T}}\biggl(\ln\frac{S_0}{K} + T(r-1/2)\biggr)\biggr) = 25,587. \end{aligned}$$

§ 8. Заключение

В результате получен алгоритм вычисления справедливых цен европейских опционов для моделей под управлением процессов Леви с бесконечной мерой Леви. Проблемы с сингулярностью меры Леви в нуле решены за счет использования субординации или замены времени на случайную величину для гауссова процесса. Субординатор обладает рядом аналитических преимуществ по сравнению с общим процессом Леви, так как субординатор является неубывающим процессом, что влечет ограниченную вариацию его траекторий. Это позволяет разрабатывать эффективные имитационные модели субординаторов и использовать метод Монте-Карло для вычисления внешнего математического ожидания по субординатору.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Applebaum D.* Levy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.
2. *Black F*, *Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities. — J. Polit. Econom., 1973, v. 81, № 3, p. 637–654.
3. *Boyarchenko S. I.*, *Levendorski S. Z.* Generalizations of the Black–Scholes equation for truncated Lévy Processes. Working Paper. Philadelphia: Univ. Pennsylvania, 1999.
4. *Boyarchenko S. I.*, *Levendorski S. Z.* Non-Gaussian Merton–Black–Scholes theory. Singapore etc.: World Sci. Publ., 2002.
5. *Boyarchenko S. I.*, *Levendorski S. Z.* Option pricing for truncated Lévy Processes. — Internat. J. Theor. Appl. Finance, 2000, v. 3, № 3, p. 549–552.
6. *Cont R.*, *Voltchkova E.* A finite difference scheme for option pricing in jump-diffusion and exponentional Lévy models. — SIAM J. Numer. Anal., 2005, v. 43, № 4, p. 1596–1626.
7. *Cont R.*, *Tankov P.* Financial Modeling with Jump Processes. London etc/Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
8. *Merton R.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. — J. Financ. Econom., 1976, v. 3, is. 1–2, p. 125–144.
9. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. Т. 1. М.: Фазис, 1998.
10. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Теория. Т. 2. М.: Фазис, 1998.

Поступила в редакцию
2.X.2012