ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

ЗУБКОВ А. М., САЛИХОВ Н. П.

КОЛЛЕКЦИЯ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ГЛАВА IX

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН [1)]

Содержание

[1)] От Редакции. Этой главой мы продолжаем публикацию журнальной редакции книги «Коллекция неравенств теории вероятностей».

Запланировано, что издание всей коллекции в виде единой книги будет осуществлено после завершения ее публикации в журнальной редакции, но к началу следующего года Редакция намерена издать ее в форме защищенной от копирования π-книги (*П*ортативной *И*нтерактивной книги), позволяющей, в частности, пополнять (многими способами) ее содержание по усмотрению читателя-пользователя.

Публикация журнальной редакции начата в шестом выпуске тома 18 (2011) («Гл. I. Неравенства для моментов функций от случайной величины»), шести выпусках тома 19 (2012) («Гл. II. Неравенства для моментов функций от двух случайных величин», «Гл. III. Неравенства для моментов функций от нескольких случайных величин»). «Гл. IV. Неравенства для распределений случайных величин», «Гл. V. Неравенства для совместных распределений двух случайных величин», «Гл. VI. Неравенства для вероятности принадлежности многомерной случайной величины заданному множеству», «Гл. VII. Неравенства для функции распределения или плотности сумм, произведений, членов вариационного ряда случайных величин»)

(Продолжение примечания см. на с. 105.)

§ 9.1. Независимые случайные величины

§ 9.1.1. Независимые неограниченные случайные величины общего вида

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant x\right\} \leqslant e^{-hx} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{M}\, e^{hS_k},$$

если $S_k = X_1+X_2+\cdots+X_k$, $k=1,2,\ldots,n$, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ независимы, $h\geqslant 0$, $x>0$.

1. *Боровков А. А.* Замечания о неравенствах для сумм независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 3, с. 588–590.

$$\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{S_k<x_k\} \leqslant \mathbf{P}\{S_1<x_1, S_2<x_2,\ldots,S_n<x_n\},$$
$$\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{S_k\leqslant x_k\} \leqslant \mathbf{P}\{S_1\leqslant x_1, S_2\leqslant x_2,\ldots,S_n\leqslant x_n\},$$

если $X_1,X_2,\ldots,X_n$ независимы, $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbf{R}$.

1. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с. (См. с. 95.)
2. *Прохоров А. В.*, *Ушаков В. Г.*, *Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1986, 327 с. (См. с. 79 и ссылку там на *Robbins H.*, 1954.)

и первом выпуске тома 20 (2013) («Гл. VIII. Неравенства для функции распределения модуля или нормы суммы случайных величин»). В последующих выпусках нашего журнала будут опубликованы: «Гл. X. Неравенства для функции распределения максимума модуля или нормы суммы случайных величин», «Гл. XI. Отклонение функции распределения суммы случайных величин от конкретной функции распределения», «Гл. XII. Неравенства для характеристических функций», «Гл. XIII. Расстояния между законами распределения», «Гл. XIV. Неравенства для вероятностей различных событий», «Гл. XV. Неравенства для гамма-функции, факториалов, биномиальных и полиномиальных коэффициентов», «Гл. XVI. Смесь».

Издание каждой главы сопровождается списком используемых обозначений и полным списком литературы, упомянутой в отдельных «статьях-экспонатах» коллекции.

§ 9.1.2. Независимые случайные величины с нулевым средним [2)]

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant t\right\} \leqslant \frac{\mathbf{M}\, f(S_n)}{f(t)},$$

если $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, $\mathbf{M}\, X_i = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $f(x)$ не убывает с ростом x, выпукла и неотрицательна для $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$.

Неравенство с $f(x) = e^{\varepsilon x}$, $\varepsilon > 0$, приведено в [1, с. 173–174].

1. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей. М.–Л.: Гостехиздат, 1946, 556 с.
2. *Золотарев В. М.* Односторонняя трактовка и уточнение некоторых неравенств чебышевского типа. — Лит. матем. сб., 1965, т. V, в. 2, с. 233–250.

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant x\right\} \leqslant \frac{\mathbf{D}\, S_n}{\mathbf{D}\, S_n + x^2},$$

если $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, $\mathbf{M}\, X_i = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $x > 0$.

1. *Золотарев В. М.* Односторонняя трактовка и уточнение некоторых неравенств Чебышевского типа. — Лит. матем. сб., 1965, т. V, в. 2, с. 233–250.

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant x\right\} \leqslant \frac{U_{2r} - U_r^2}{U_{2r} - 2x^r U_r + x^{2r}}\, \mathbf{P}\{S_n \geqslant 0\},$$

если $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, $\mathbf{M}\, X_i = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $U_t = \mathbf{M}\, S_n^t\, \mathbf{I}\{S_n \geqslant 0\} \,/\, \mathbf{P}\{S_n \geqslant 0\}$ для $t \geqslant 0$, $r > 0$, $x > \sqrt[r]{U_{2r}/U_r}$.

1. *Золотарев В. М.* Односторонняя трактовка и уточнение некоторых неравенств чебышевского типа. — Лит. матем. сб., 1965, т. V, в. 2, с. 233–250.

[2)] В предшествующих данному разделах классификации неравенств для независимых ограниченных случайных величин и независимых неотрицательных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

§ 9.1.3. Независимые симметрично распределенные случайные величины

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k < t\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}\right\} - G(t)\right| \leqslant 30\sqrt[3]{\frac{M_{\varepsilon,n}}{(\mathbf{D}\,S_n)^{\varepsilon/2}}},$$

если $S_k = X_1+X_2+\dots+X_k$, $k=1,2,\dots,n$, $X_1,X_2,\dots,X_n$ независимы и имеют симметричные распределения, $G(x)=\max\{0,2\Phi(x)–1\}$ для $x\in\mathbf{R}$.

1. *Невзоров В. Б.* О некоторых оценках распределения максимума последовательных сумм. — Теория вероятн. матем. статист., 1971, в. 5, с. 88–97.

$$\left|\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k < x\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}\right\} - \big(2\,\Phi(x)-1\big)\right| \leqslant \frac{68\,b}{d\sqrt{n}\,(1+x^3)},$$

если $S_k = X_1+X_2+\dots+X_k$, $\mathbf{M}\,X_k=0$, $|X_k|\leqslant b$ для $k=1,2,\dots,n$, $\mathbf{D}\,S_n\geqslant d^2n$, $d>0$, $X_1,X_2,\dots,X_n$ независимы и имеют симметричные распределения, $x\geqslant 0$.

Комментарий 9.1.5-1

В работе [1] получена оценка $2\,(2+c)\,b\,(d\sqrt{n}\,(1+x^3))^{-1}$, где c — константа из неравенства С. В. Нагаева [2; 3, с. 178, 283]. Согласно [4], можно положить $c=31,935$. Отсюда получаем $2\,(2+c)\leqslant 68$.

1. *Невзоров В. Б.* О некоторых оценках распределения максимума последовательных сумм. — Теория вероятн. матем. статист., 1971, в. 5, с. 88–97.
2. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 2, с. 231–253.
3. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
4. *Paditz L.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — Statistics, 1989, v. 20, № 3, p. 453–464.

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k < t\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}\right\} - G(t)\right| \leqslant H_n\frac{b}{\sqrt{\mathbf{D}\,S_n}},$$

если $S_k = X_1+X_2+\dots+X_k$, $\mathbf{M}\,X_k=0$, $|X_k|\leqslant b$ для $k=1,2,\dots,n$, $X_1,X_2,\dots,X_n$ независимы и имеют симметричные распределения, $G(x)=\max\{0,2\Phi(x)-1\}$ для $x\in\mathbf{R}$, $H_n = 2\,(A_n+\sqrt{2/\pi})\leqslant 3,2$, A_n — константа в теореме Эссеена ($A_n\leqslant 0,7915$). О константе A_n см. Комментарий 11.1.4-1.

1. *Невзоров В. Б.* О некоторых оценках распределения максимума последовательных сумм. — Теория вероятн. матем. статист., 1971, в. 5, с. 88–97.

§ 9.2. Независимые одинаково распределенные случайные величины

§ 9.2.1 Неограниченные независимые одинаково распределенные случайные величины

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{k\in\mathbf{Z}_+} S_k = x\Big\} \leqslant \mathbf{P}\Big\{\sup_{k\in\mathbf{Z}_+} S_k = 0\Big\},$$

если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $x \geqslant 0$.

1. *Рогозин Б. А.* О распределении величины первого перескока. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. IX, в. 3, с. 498–515.

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{k\in\mathbf{Z}_+} S_k \geqslant x\Big\} \leqslant e^{-r\,x},$$

если $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{M}\,e^{\,rX_1} < 1$, $r > 0$, $x \geqslant 0$.

1. *Рогозин Б. А.* О распределении величины первого перескока. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. IX, в. 3, с. 498–515.

$$\mathbf{P}\Big\{\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant x\Big\} \leqslant e^{-tx}\,\big(f(t)\big)^n,$$

если $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $n \in \mathbf{N}$, $f(t) = \max\{\mathbf{M}\,e^{\,t\,X_1}, 1\}$, $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$.

1. *Боровков А. А.* О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. XV, в. 3, с. 377–418.
2. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с. (См. с. 183.)

§ 9.2.2. Независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним [3)]

$$\mathbf{P}\left\{\max_{n\in\mathbf{N}}\left(S_n - \frac{n}{t}\ln \mathbf{M}\, e^{t X_1}\right) \geqslant \varepsilon\, t\right\} \leqslant e^{-\varepsilon t^2},$$

если $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{M}\, X_1 = 0$, $\mathbf{D}\, X_1 = 1$, $\varepsilon > 0$, $t > 0$.

1. *Robbins H.*, *Siegmund D.* Iterated logarithm inequalities and related statistical procedures. — In: Mathematics of the Decision Sciences: Part II. /Ed. by G. B. Dantzig, A. F. Veinott, Jr. Providence, RI: AMS, 1968, p. 267–279. (Ser.: Lect. Appl. Math. V. 12.)

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k > x\right\} < n\,\mathbf{P}\{X_1 \geqslant y\} + \left(\frac{2nc_m}{y^m}\right)^{x/y} \exp\left\{1 + 2n\left(\frac{m\ln y - \ln(2nc_m)}{y}\right)^2\right\},$$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k > z\right\} \leqslant \frac{nc_m e}{z^m}\,(1 + B_{z,n}),$$

если $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{M}\, X_1 = 0$, $\mathbf{D}\, X_1 = 1$, $x > 0$, $y > (2c_m n)^{1/m} e^{L_{m+1}}$, $z > (1 + 1/m)(2c_m n)^{1/m} e^{L_{m+1}}$,

$$B_{z,n} = 2\left(\frac{z^m}{2nc_m e}\right)^{-1/m} \exp\left\{1 + \frac{5n}{z^2}\,\ln^2 \frac{2nc_m e}{z^m}\right\}, \quad L_t = \sup_{v\geqslant 1} \frac{v^t}{e^v}\int_1^v \frac{e^u}{u^t}\,du,$$

где $c_m = \mathbf{M}\,(\max\{X_1, 0\}^m$, $m > 2$, $n \geqslant 1$.

Верна оценка $L_t \leqslant 1 + t\,(1 + (t+1)^{t+1} e^{-t})/2$ для $t > 2$.

1. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с. (См. с. 344–345.)

[3)] В предшествующих данному разделах классификации неравенств для ограниченных независимых одинаково распределенных случайных величин и для неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

$$\mathbf{P}\Big\{\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k > x\Big\} \leqslant e^{-x^2/(2n\sigma)},$$

если $S_k = X_1+X_2+\dots+X_k$, $k=1,2,\dots,n$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{M}\,X_1 = 0$, $\mathbf{D}\,X_1 = 1$, $\mathbf{M}\,e^{\lambda X_1} \leqslant e^{\lambda^2\sigma/2}$ при некотором $\sigma > 0$ для всех $\lambda > 0$, $x > 0$.

1. *Питербарг В. И.* О больших скачках случайного блуждания. —Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 54–64.

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant i\leqslant T} S_i > x,\, T \leqslant n\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} (-S_i) > x\right\} \mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant i\leqslant T} S_i > x\right\},$$

если $S_i = X_1 + X_2 + \dots + X_i$, $i \in \mathbf{Z}_+$, $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{M}\,X_1 = 0$, $0 < \mathbf{D}\,X_1 < \infty$, $S_0 = 0$, $n \in \mathbf{N}$, $T = \inf\{m \in \mathbf{N}:\ S_m \leqslant 0\}$, $x > 0$.

1. *Афанасьев В. И.* О функционалах от случайного блуждания до момента первого достижения отрицательной полуоси. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 4, с. 773–777.

§ 9.2.3. Симметрично и одинаково распределенные независимые случайные величины

$$\mathbf{P}\Big\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \leqslant 0\Big\} = \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}},$$

$$\mathbf{P}\left\{S_1 < 0,\, \dots,\, S_{n-1} < 0,\, S_n \geqslant 0\right\} = \frac{1}{2n-1}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}},$$

если $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, $k=1,2,\dots,n$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывным симметричным распределением.

1. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с. (См. с. 121.)

§ 9.3. Зависимые случайные величины

§ 9.3.1. Неограниченные случайные величины

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=1}^{k}(X_i - a\,d_i) < b\right\} \geqslant f_n \geqslant \frac{ab}{1+ab},$$

если $\mathbf{M}\,(X_n|X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})=0$, $\mathbf{M}\,(X_n^2|X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})=d_n$, $\mathbf{M}\,X_1=0$, $\mathbf{M}\,X_1^2 = d_1$, $f_n = abh_{n-1}(4)/(1+abh_{n-1}(4))$, $h_n(x) = h_1(h_{n-1}(x))$ для $n=2,3,\ldots$, $f_1 = 4ab/(1+4ab)$, $h_1(x) = (2x/(x+1))^2$ для $x\in\mathbf{R}$, $a>0$, $b>0$.

1. *Карлин С.*, *Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976, 568 с. (См. с. 536–537.)

$$\mathbf{P}\{S_1<1,\ S_2<2,\ldots,\ S_n<n\,|\,S_n=k\} = 1-\frac{k}{n},$$

$$\mathbf{P}\{S_1<1,\ S_2<2,\ldots,\ S_{n-1}<n-1,\ S_n\leqslant n-i\} = \sum_{j=1}^{n-i}\left(1-\frac{j}{n}\right)\mathbf{P}\{S_n=j\},$$

если $S_l = X_1+X_2+\cdots+X_l$, $l=1,2,\ldots,n$, распределение вектора $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ инвариантно относительно перестановок координат, $X_1,X_2,\ldots,X_n\in\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{P}\{S_n=k\}>0$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, $0\leqslant k\leqslant n-1$.

1. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971, 263 с. (См. с. 16, 21.)
2. *Роббинс Г.*, *Сигмунд Д.*, *Чао И.* Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977, 167 с. (См. с. 42.)

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}(k-S_k)<m\right\} = 1-\sum_{j=m}^{n}\frac{m}{j}\,\mathbf{P}\{S_j=j-m\},$$

если $S_k = X_1+X_2+\cdots+X_k$, $k=1,2,\ldots,n$, распределение вектора $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ инвариантно относительно перестановок координат, $X_1,X_2,\ldots,X_n\in\mathbf{Z}_+$, $1\leqslant m\leqslant n$.

1. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971, 263 с. (См. с. 31.)

$$\mathbf{P}\Big\{ \max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant 2\,t\,\sqrt{G_n}\Big\} < e^{-t^2},$$

если $S_l = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{M}\,X_1 = 0$,

$$\mathbf{M}\,(X_k \,|\, X_1, X_2, \dots, X_{k-1}) \,=\, 0, \quad \frac{\mathbf{M}\,(X_k^2 \,|\, X_1, X_2, \dots, X_{k-1})}{\mathbf{M}\,X_k^2} \leqslant R_k$$

$$\mathbf{M}\,(X_k^m \,|\, X_1, X_2, \dots, X_{k-1}) \leqslant \frac{\mathbf{M}\,(X_k^2 \,|\, X_1, X_2, \dots, X_{k-1})\,H^{m-2}\,m!}{2}$$

для $k = 2, 3, \dots, n$, $m = 3, 4, \dots$, $\mathbf{M}\,X_1^m \leqslant \mathbf{M} X_1^{\;2} H^{m-2} m!/2$ для $m = 3, 4, \dots$ при некотором $H > 0$, $G_n = \mathbf{M}\,X_1^2 + \sum_{k=2}^n R_k\,\mathbf{M}\,X_k^2$, $0 < t < \sqrt{G_n}/(2H)$.

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. 4. М.: Наука, 1964, 577 с. (См. с. 331 и ссылку там на *С. Н. Бернштейн*, 1937.)

§ 9.3.2. Случайные величины с нормальными распределениями [5)]

$$\Big|\,\mathbf{P}\,\Big\{ \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \leqslant u\Big\} - \big(\Phi(u)\big)^n\Big| \leqslant v_n,$$

если $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — стационарная гауссовская последовательность, $\mathbf{M}\,X_i = 0$, $\mathbf{D}\,X_i = 1 = r_0$, $r_t = \mathbf{M}\,X_i X_{i+t}$ для $t \in \mathbf{N}$, $u \geqslant 1{,}055$, $1 - \Phi(u) \leqslant a/n \leqslant e^{-1}$ при некотором $a > 0$; оценка v_n вычисляется по следующим правилам: пусть $\rho = \sup\{0, r_1, r_2, \dots\}$, ν — число тех $t \in \mathbf{N}$, для которых $r_t \neq 0$, $\tau = \max\{\sup\{r_t\colon\ t \in \mathbf{N},\ r_t \neq \rho\}, 0\}$, $\delta = \sup\{|r_t|\colon\ t \in \mathbf{N},\ r_t \neq \rho\}$, $\alpha = \rho/(1+\rho)$, $\beta = 2/(1+\rho)$, $\gamma = (1-\rho)/(1+\rho)$, $\varepsilon = \beta\,(\rho - \tau)/(1+\tau)$, $\omega = (2-\tau)/(1+\tau)$; тогда: а) если $\rho > 0$ или если $\rho = 0$ и $\nu < \infty$, то

$$v_n = \frac{4\,(1+\rho)\,a^{\beta}\,(1+\theta)\,\nu}{n^{\gamma}\sqrt{\gamma}\,(4\,\pi\,\ln(n/a))^{\alpha}},$$

где $\theta = 0$ при $\rho = 0$, а при $\rho > 0$

$$\theta = a^{\varepsilon} 2^{\omega} (4\pi)^{\varepsilon/2} \sqrt{\gamma} \Big(\frac{1}{1+\rho}\Big)^{(2+\tau)/(1+\tau)} \frac{1}{\nu(1-\delta^2)} n^{\varepsilon} \Big(\ln\frac{n}{a}\Big)^{1+\varepsilon/2} {\sum}' |r_t|,$$

суммирование в ${\sum}'$ идет по всем $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых $r_t \neq \rho$; б) если $\rho = 0$, $\nu = \infty$, то $v_n = 16\,a^2\,(1-\delta^2)^{-1/2}\,n^{-1} \ln(n/a) \sum_{t=0}^n |r_t|$.

1. *Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрен Г.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с. (См. с. 123.)

[5)] В предшествующих данному разделах классификации неравенств для ограниченных, неотрицательных, с нулевым средним и двухточечных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

Список обозначений

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел,

$\mathbf{R}-$ — множество всех вещественных чисел,

$\mathbf{R}_+$ — множество всех неотрицательных чисел,

$\mathbf{R}^k$ — k-мерное евклидово пространство с евклидовой нормой,

$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел,

$\mathbf{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел,

$X, Y, Z, X_1, X_2, \dots, X_n$ — случайные величины (вещественные, если не оговорено иное),

$\mathbf{M}\, X = \mu$ и $\mathbf{D}\, X = \sigma^2$ $(\sigma \geqslant 0)$, $\mathbf{M}\, X_i = \mu_i$ и $\mathbf{D}\, X_i = \sigma_i^2$ $(\sigma_i \geqslant 0)$ — математические ожидания и дисперсии случайных величин X, X_i,

$\beta_r = \beta_r(X) = \mathbf{M}\, |X|^r$, $\nu_r = \nu_r(X) = \mathbf{M}\, |X - \mathbf{M}\, X|^r$ — абсолютный момент и абсолютный центральный момент порядка r, $\Gamma_k(X)-$ семиинвариант порядка k (см. *Петров В. В.* (1987), с. 20),

$M_{p,n} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\, |X_k|^p$, $B_n = M_{2,n}$, $L_{p,n} = B_n^{-p/2} M_{p,n}$ (см. *Петров В. В.* (1987), с. 94 и 34),

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ для $n \in \mathbf{N}$, $S_0 = 0$,

$M_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k|$,

$F(x) = \mathbf{P}\,\{X < x\}$ и $F_k(x) = \mathbf{P}\,\{X_k < x\}$ — функции распределения случайных величин X и X_k,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_\infty^x e^{-t^2/2}\, dt$,

$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ — случайная величина X имеет распределение биномиальное с параметрами $(n,\ p)$, Пуассона с параметром λ, нормальное с параметрами (a, σ) (см. *Петров В. В.* (1987), с. 10),

$\gamma_q = \gamma_q(X)$ — q-квантиль случайной величины X, т. е. $\mathbf{P}\,\{X \leqslant \gamma_q\} \geqslant q$, $\mathbf{P}\,\{X \geqslant \gamma_q\} \geqslant 1 - q$, $0 \leqslant q \leqslant 1$,

$\mathrm{med}\, X = \mathrm{med}(X) = \gamma_{1/2}(X)$ — медиана случайной величины X (см. *Петров В. В.* (1987), с. 17),

$L(F, G) = \inf\,\{t \geqslant 0 : F(x{-}t){-}t \leqslant G(x) \leqslant F(x{+}t){+}t,\ t \in (-\infty, \infty)\}$ — расстояние (метрика) Леви между функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ (см. *Петров В. В.* (1987), с. 38),

$F_1 * F_2$ — свертка (композиция) распределений F_1 и F_2 (см. *Петров В. В.* (1987), с. 12),

$x^+ = \max\,\{0,\, x\}$, $x^- = (-x)^+$,

$||f||_p$, $||f||_\infty$ — нормы в пространствах L_p, L_∞,

$I(A)$ — индикатор события (множества) A,

$\bigoplus$ — знак сложения по модулю 2,

C_n^k- число сочетаний из n по k,

$\mathrm{sgn}\, x = \mathrm{sgn}\,(x)$, $\Gamma(x)$, $sh\, x$, $ch\, x$ — функция Кронекера, гамма-функция, гиперболический синус, гиперболический косинус соответственно (см. *Прохоров Ю. В.* (1988), с. 541),

$[x]$ и $\{x\}$ — целая часть и дробная части x,

$\operatorname{tr} A$ — след матрицы A,

$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — наибольший общий делитель целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$,

используются также термины:

мода рапределения, унимодальное (одновершинное) распределение (см. *Прохоров Ю. В.* (1999), с. 356, 419),

последовательность $m-$ зависимых случайных величин (см. Вероятность (1999), с. 382),

симметричное распределение (см. *Петров В. В.* (1987), с. 19),

центральная симметрия(центрально симметричное множество) (см. *Прохоров Ю. В.* (1988), с. 542),

выпуклая (выпуклая вниз) функция (см. *Петров В. В.* (1987), с. 15–16)).

СВ — случайная величина или случайный вектор,

НОРСВ — независимые одинаково распределенные случайные величины или векторы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. А.* Сходимость произведений независимых случайных величин. — В. сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. /Под. ред. В. В. Калашникова, В. М. Золотарева. М.: ВНИИСИ, 1984, с. 12–21. (См. с. 108.)
2. *Афанасьев В. И.* О функционалах от случайного блуждания до момента первого достижения отрицательной полуоси. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 4, с. 773–777. (См. с. 122.)
3. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей. М.–Л.: Гостехиздат, 1946, 556 с. (См. с. 109, 110, 116.)
4. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. 4. М.: Наука, 1964, 577 с. (См. с. 126.)
5. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с. (См. с. 117, 118, 121, 122.)
6. *Боровков А. А.* Замечания о неравенствах для сумм независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 3, с. 588–590. (См. с. 105.)
7. *Боровков А. А.* О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. XV, в. 3, с. 377–418. (См. с. 117, 118.)
8. *Григелионис Б.* Экспоненциальная оценка для распределений локально безгранично делимых процессов. — Лит. матем. сб., 1975, т. XV, в. 3, с. 93–98. (См. с. 111.)
9. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с. (См. с. 107, 115, 124.)
10. *Егоров В. А.*, *Поздняков В. И.* О законе повторного логарифма для урезанных сумм. — Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. 1994, в. 4, с. 34–38. (См. с. 116.)
11. *Золотарев В. М.* Односторонняя трактовка и уточнение некоторых неравенств чебышевского типа. — Лит. матем. сб., 1965, т. V, в. 2, с. 233–250. (См. с. 109, 110, 112.)
12. *Карлин С.*, *Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976, 568 с. (См. с. 125.)
13. *Лидбеттер М.*, *Ротсен Х.*, *Линдгрен Г.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с. (См. с. 126, 127.)
14. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с. (См. с. 107, 112.)
15. *Морквенас Р.* Экспоненциальные оценки для распределений некоторых двупараметрических процессов. — Лит.матем.сб., 1983, т. 23, в. 2, с. 141–146. (См. с. 111.)