ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2013

Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

ЗУБКОВ А. М., САЛИХОВ Н. П.

КОЛЛЕКЦИЯ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ГЛАВА XI

ОТКЛОНЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ОТ КОНКРЕТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ [1)]

Содержание

[1)] О т Р е д а к ц и и. Этой главой мы продолжаем публикацию журнальной редакции книги «Коллекция неравенств теории вероятностей».

Запланировано, что издание всей коллекции в виде единой книги будет осуществлено после завершения ее публикации в журнальной редакции, но к началу следующего года Редакция намерена издать ее в форме защищенной от копирования π-книги (*П*ортативной *И*нтерактивной книги), позволяющей, в частности, пополнять (многими способами) ее содержание по усмотрению читателя-пользователя.

(Продолжение примечания см. на с. 482.)

§ 11.1. Суммы независимых случайных величин
§ 11.1.1. Неограниченные независимые случайные величины

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{b}-a<x\right\}-\Phi(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\frac{A_n}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}\beta_i+\frac{|ab-m|}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi e}}\left|1-\frac{\sigma^2}{b^2}\right|\max\left\{1,\ \frac{b^2}{\sigma^2}\right\},$$

если $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, $\alpha_i = \mathbf{P}\{X_i \notin [t_i, \tau_i]\}$, $\beta_i = \mathbf{M}\,|X_i-m_i|^3\,\mathbf{I}\{t_i\leqslant X_i\leqslant\tau_i\}+|m_i|^3\alpha_i$, $m_i = \mathbf{M}\,X_i\,\mathbf{I}\{t_i\leqslant X_i\leqslant\tau_i\}$, $-\infty \leqslant t_i < \tau_i \leqslant +\infty$ для $i = 1, 2, \dots, n$, $m = m_1+m_2+\dots+m_n$, $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{M}\,X_i^2\,\mathbf{I}\{t_i\leqslant X_i\leqslant\tau_i\}-m_i^2)} > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $b > 0$, A_n — константа в теореме Эссеена, $A_n \leqslant 0,7915$.

При $t_i = -\infty$, $\tau_i = +\infty$, $b = \sigma$, $a = m/\sigma$ получается оценка Эссеена. О константе A_n см. Комментарий 11.1.3-1.

1. *Осипов Л. В., Петров В. В.* Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XII, в. 2, с. 322–329.
2. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с. (См. с. 164.)

Публикация журнальной редакции начата в шестом выпуске тома 18 (2011) («Гл. I. Неравенства для моментов функций от случайной величины»), шести выпусках тома 19 (2012) («Гл. II. Неравенства для моментов функций от двух случайных величин», «Гл. III. Неравенства для моментов функций от нескольких случайных величин», «Гл. IV. Неравенства для распределений случайных величин», «Гл. V. Неравенства для совместных распределений двух случайных величин», «Гл. VI. Неравенства для вероятности принадлежности многомерной случайной величины заданному множеству», «Гл. VII. Неравенства для функции распределения или плотности сумм, произведений, членов вариационного ряда случайных величин») и первых трех выпусках тома 20 (2013) («Гл. VIII. Неравенства для функции распределения модуля или нормы суммы случайных величин», «Гл. IX. Неравенства для функции распределения максимума сумм случайных величин», «Гл. X. Неравенства для функции распределения максимума модуля или нормы суммы случайных величин»). В последующих выпусках нашего журнала будут опубликованы: «Гл. XII. Неравенства для характеристических функций», «Гл. XIII. Расстояния между законами распределения», «Гл. XIV. Неравенства для вероятностей различных событий», «Гл. XV. Неравенства для гамма-функции, факториалов, биномиальных и полиномиальных коэффициентов», «Гл. XVI. Смесь».

Издание каждой главы сопровождается списком используемых обозначений и полным списком литературы, упомянутой в отдельных «статьях-экспонатах» коллекции.

$$\left|\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Y_i\,\frac{m_X}{m_Y}\right) < t\,\frac{\sigma}{m_Y}\,\sum_{i=1}^{n} Y_i\right\} - \Phi(t)\right| \leqslant 31,995\,\frac{\mu}{\sigma^3(|\,t\,|^3 + 8/27)} + \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t^2/8}\,\frac{\sigma_Y}{|m_Y|},$$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Y_i\,\frac{m_X}{m_Y}\right) < x\,\frac{\sigma}{m_Y}\,\sum_{i=1}^{n} Y_i\right\} - \Phi(x)\right| \leqslant 0,7915\,\frac{27\mu}{8\,\sigma^3} + \frac{8\,\sigma_Y}{e\,\sqrt{2\pi}\,|m_Y|} + 17\left(\frac{\sigma_Y}{m_Y}\right)^2,$$

если $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$— такие независимые случайные векторы в $\mathbf{R}^2$, что $X_i = 0$, если $Y_i = 0$ для $i = 1,2,\ldots,n$, $m_X = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\,X_i$, $m_Y = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\,Y_i \neq 0$, $\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\,Y_i} > 0$, $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\,(X_i - Y_i\,m_X/m_Y)}$,

$$\mu = \gamma + 3\sigma^3\lambda + 3\sigma\sqrt[3]{\lambda\gamma^2},\quad \gamma = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\left|X_i - \frac{m_X}{m_Y}\,Y_i\right|^3,\ \lambda = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\left|\frac{Y_i - \mathbf{M}\,Y_i}{\sigma_Y}\right|^3,$$

$|t| \leqslant |m_Y|/(3\sigma_Y)$, $n \in \mathbf{N}$.

1. *Новак С. Ю.* О распределении отношения сумм случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 533–560.

§ 11.1.2. Ограниченные независимые случайные величины

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\frac{S_m}{\sqrt{n}} < x\right\} - \Phi(x)\right| \leqslant 2\,\frac{\sqrt{M}}{\sqrt[4]{n}}\left(1 + \frac{3M}{2\sqrt{n}} + \frac{M^2}{3n}\right),$$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\frac{S_m^*}{\sqrt{n}} < x\right\} - \Phi(x)\right| \leqslant 2\,\frac{\sqrt{M}}{\sqrt[4]{n}}\left(1 + \frac{3M}{\sqrt{n}} + \frac{M^2}{3n}\right),$$

если $S_m = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$, $S_m^* = S_m + \sqrt{\gamma}\,X_{m+1}$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, $|X_i| \leqslant M$, $\mathbf{M}\,X_i = 0$, $\mathbf{M}\,X_i^2 = \sigma_i^2 > 0$ для $i = 1, 2, \ldots$, $n = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_m^2 + \gamma\,\sigma_{m+1}^2$, $0 < \gamma \leqslant 1$.

1. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. VIII, в. 1, с. 89–94.

§ 11.1.3. Независимые случайные величины с нулевым средним [2)]

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \bigl|\mathbf{P}\bigl\{S_n < x\sqrt{B_n}\bigr\} - \Phi(x)\bigr| \leqslant A_n\, L_{3,n} \leqslant 0,5591\, L_{3,n},$$

если $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — такие независимые случайные величины, что $\mathbf{M}\, X_k = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, $B_n = \mathbf{D}\, S_n > 0$, $L_{3,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\, |X_k|^3 / \sqrt{B_n^3}$. Наилучшие возможные константы A_n удовлетворяют неравенствам

$$0,3989 < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} A_n \leqslant 0,5591.$$

Комментарий 11.1.3-1

Это — теорема Эссеена. Оценки константы $A = \sup_{n\geqslant 1} A_n$ последовательно улучшались от $A \leqslant 7,5$ (*C. G. Esseen*, 1945) до приведенной выше.

В [1] утверждается, что $A \leqslant 0,56$. В [5] доказана оценка $A \leqslant 0,5591$.

1. *Королев В. Ю.*, *Шевцова И. Г.* Новая моментная оценка скорости сходимости в теореме Ляпунова. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 3, с. 577–582.
2. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с. (См. с. 157–158, 283.)
3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с. (См. с. 156, 391.)
4. *Paditz L.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — Statistics, 1989, v. 20, № 3, p. 453–464.
5. *Шевцова И. Г.* Моментные оценки точности нормальной аппроксимации с уточненной структурой для сумм независимых симметричных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 499–532.

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \bigl|\mathbf{P}\bigl\{S_n < x\sqrt{B_n}\bigr\} - \Phi(x)\bigr| < \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right),$$

если $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — такие независимые случайные величины, что $\mathbf{M}\, X_i = 0$, $\mathbf{M}\, X_i^2 > 0$, $\mathbf{M}\, |X_i|^3 / \mathbf{M}\, X_i^2 \leqslant \varepsilon / \sqrt{B_n}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $0 < \varepsilon < 1$.

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. 4. М.: Наука, 1964, 577 с. (См. с. 259–275 и ссылку там на *С. Н. Бернштейн*, 1934.)

[2)] В предшествующих данному разделу классификации неравенств для неотрицательных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

§ 11.2. Независимые одинаково распределенные случайные величины

§ 11.2.1. Неограниченные независимые одинаково распределенные случайные величины

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{P}\left\{S_n < xn^{1/\alpha}\right\} - G(x)\right| \leqslant \left(\frac{6}{\alpha}u\,2^{r/\alpha}\Gamma(r/\alpha) + c^2gv\right)b\frac{(\nu(r))^t}{n^{r/\alpha-1}},$$

если $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $G(x)$ — функция распределения устойчивого закона с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 2$, $\sup_{x\in\mathbf{R}}|G'(x)| \leqslant g$; $\int_{-\infty}^{\infty} x\,d(\mathbf{P}\{X_1 < x\} - G(x)) = 0$, если $\alpha \geqslant 1$; $\nu(r) = \int_{-\infty}^{\infty}|x|^r\,|d(\mathbf{P}\{X_1 < x\} - G(x))|$, $r = 1 + [\alpha]$,

$$(t,u,v) = \begin{cases}\left(1, \sqrt{e}, 16^{1/\alpha}\right), & \text{если } \nu(r) \geqslant 1,\\ \left((r+1)^{-1}, 1, 6^{1/(r-\alpha)}\right), & \text{если } \nu(r) < 1,\end{cases}$$

$b > (2\pi)^{-1}$, c — корень уравнения $\int_0^{x/4} u^{-2}\sin^2 u\,du = \pi/4 + 1/(8b)$.

Если $G(x) = \Phi(x)$, $\alpha = 2$, $r = 3$, то $\Gamma(r/\alpha) = \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, $g = (2\pi)^{-1/2}$. Для величины c известны оценки $\pi+1/(2b) \leqslant c \leqslant 32b/(2\pi b-1)$.

Комментарий 11.2.1-1

В [2] имеются также оценки сверху для $|f^n(tn^{-1/\alpha}) - g(t)|$, где $f(t) = \mathbf{M}\,e^{itX_1}$, $g(t)$ – характеристическая функция устойчивого закона. В [3] эти оценки обобщаются на многомерный случай. В [4] имеются неравенства для вероятностей больших уклонений сумм независимых не обязательно одинаково распределенных случайных величин в случае сходимости к устойчивому закону.

1. *Банис И. И.* Оценка скорости сходимости в интегральной предельной теореме. — Лит. матем. сб., 1972, т. XII, в. 1, с. 41–45.
2. *Банис И. И.* Об интегральной предельной теореме при сходимости к устойчивому закону в многомерном случае. — Лит. матем. сб., 1970, т. X, в. 4, с. 665–671.
3. *Вайткус П. С.* Неравенства для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин в случае предельного устойчивого закона. — Лит. матем. сб., 1972, т. XII, в. 4, с. 27–30.

§ 11.2.2. Ограниченные независимые одинаково распределенные случайные величины

$$1 - b\,\frac{x^3}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\mathbf{P}\,\{S_n \geqslant x\sigma\sqrt{n}\}}{1-\Phi(x)} \leqslant 1 + a\,\frac{x^3}{\sqrt{n}},$$

если $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что $|X_1| < c$, $\mathbf{M}\,X_1 = 0$, $\sigma = (\mathbf{D}\,X_1)^{1/2} > 0$, $a = c(z + 8\sqrt{2\pi})/\sigma + \sqrt{2\pi}zd/72$, $d = \sigma/(24c)$, $z = e^{d^2/12}$, $b = c(1 + 8\sqrt{2\pi})/\sigma$, $3/2 \leqslant x \leqslant dn^{1/6}$.

1. *Хатунцева М. В.* Оценки в центральной предельной теореме для квантилей. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. XIX, в. 3, с. 626–632.

$$|F_n^-(t) - \Phi^-(t)| \leqslant \Big(\overline{\overline{A}}_n\sqrt{2\pi}e^{8}\frac{c}{\sigma} + 8a\Big)\frac{1 + (\Phi^-(t))^2}{\sqrt{n}},$$

если $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что $|X_1| < c$, $\mathbf{M}\,X_1 = 0$, $\sigma = \sqrt{bD\,X_1} > 0$, F_n^-, Φ^- — функции, обратные к $F_n(x) = \mathbf{P}\,\{S_n < x\sigma\sqrt{n}\}$ и $\Phi(x)$, $\overline{\overline{A}}_n$ — константа в теореме Берри–Эссеена, $\overline{\overline{A}}_n \leqslant 0,7655$, $d = \sigma/(24c)$, $n \geqslant \max\{1024a^2, 15625\min\{(d/2)^6, (16a)^{-2}\}\}$,

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}}n^{-1/6}e^{-\gamma^2 n^{1/3}/2} \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}}n^{-1/6}e^{-\gamma^2 n^{1/3}/2},$$

$\gamma = (1 - 2^{-8/3})\min\{d, (2a)^{-1/3}\}$, $a = c(z + 8\sqrt{2\pi})/\sigma + \sqrt{2\pi}zd/72$, $z = e^{d^2/12}$. О константе $\overline{\overline{A}}_n$ см. Комментарий 11.2.3-1.

1. *Хатунцева М. В.* Оценки в центральной предельной теореме для квантилей. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. XIX, в. 3, с. 626–632.

[4] В предшествующих следующему разделу классификации неравенств для неотрицательных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

§ 11.2.3. Независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\mathbf{P}\left\{S_n < x\sigma\sqrt{n}\right\} - \Phi(x)\right| \leqslant \overline{\overline{A}}_n \frac{\rho}{\sqrt{n}} \leqslant 0,7655 \frac{\rho}{\sqrt{n}},$$

если $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что $\mathbf{M}\, X_1 = 0$, $\sigma = \sqrt{\mathbf{M}\, X_1^2} > 0$, $\rho = \sigma^{-3}\mathbf{M}\,|X_1|^3$. Наилучшие возможные константы $\overline{\overline{A}}_n$ удовлетворяют неравенствам $0,4096 < (3+\sqrt{10})/(6\sqrt{2\pi}) \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \overline{\overline{A}}_n \leqslant 0,4748$.

Комментарий 11.2.3-1

Это — теорема Берри–Эссеена. Оценки константы $\overline{\overline{A}} = \sup_{n\geqslant 1} \overline{\overline{A}}_n$ последовательно улучшались: $\overline{\overline{A}} \leqslant 2,031$ (Takano K. A., 1951), $\overline{\overline{A}} \leqslant 0,82$ (Золотарев В. М., 1967), $\overline{\overline{A}} \leqslant 0,7882$ (van Beek P., 1971–1972), $\overline{\overline{A}} \leqslant 0,7655$ (Шиганов И. С., 1982). В [3] утверждается, что $\overline{\overline{A}} \leqslant 0,4784$. В [10] доказано, что $\overline{\overline{A}} \leqslant 0,4748$.

В [1] найдено наилучшее значение константы $\overline{\overline{A}}_1$: $\overline{\overline{A}}_1 = 0,370352\ldots$ (в классе случайных величин X_1 с симметричными распределениями наилучшая константа $\overline{\overline{A}}_1 = 0,341345\ldots$). Известно также, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, \sup_{x\in\mathbf{R}} |\mathbf{P}\{S_n < x\sigma\sqrt{n}\} - \Phi(x)| = (6\sqrt{2\pi}\sigma^3)^{-1}(|\mathbf{M}\, X_1|^3 + 3\theta\sigma^2)$, где $\theta = 0$, если распределение X_1 не решетчато, и

а) $\theta = h$, $|\mathbf{M}\, X_1|^3 + 3h\sigma^2 \leqslant \left(3+\sqrt{10}\right) \mathbf{M}\,|X_1|^3$, если X_1 имеет решетчатое распределение с максимальным шагом h;

б) $\lim_{n\to\infty} \inf_{a\in\mathbf{R}, b>0} \sqrt{n}\sup_{x\in\mathbf{R}} |\mathbf{P}\,\{S_n < x\sigma\sqrt{n}\} - \Phi((x-a)/b)| \leqslant \rho/\sqrt{2\pi}$.

Константы в правых частях неравенств а) и б) неулучшаемы. Из неравенства $\sup_{x\in\mathbf{R}} \mathbf{P}\,\{x \leqslant S_n \leqslant x+\lambda\} \leqslant 2\Phi(\lambda/(2\sigma\sqrt{n})) - 1 + 2\overline{\overline{A}}_n \rho/\sqrt{n}$ (см. [2]) при $\lambda = 0$ и того, что $\mathbf{P}\,\{X_1 = -1\} = \mathbf{P}\,\{X_1 = 1\} = 1/2$, следует оценка $\overline{\overline{A}}_n \geqslant 2^{-n-1}\sqrt{n}\, C_n^{[n/2]} > 1/(\sqrt{2\pi}(1+n^{-1})^h)$, где $h = 1/2$ при четном n, $h = 1$ при нечетном n (см. [11]).

1. *Бенткус В. Ю.*, *Кирша К. П.* Оценки близости функции распределения к нормальному закону. — Лит. матем. сб., 1989, т. XXIX, в. 4, с. 657–673.
2. *Петров В. В.* Об одном неравенстве для функций концентрации. — Лит. матем. сб., 1963, т. III, в. 1, с. 195–197.
3. *Королев В. Ю.*, *Шевцова И. Г.* Новая моментная оценка скорости сходимости в теореме Ляпунова. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 3, с. 577–582.
4. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с. (См. с. 157–158, 195, 283.)
5. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с. (См. с. 159, 391.)
6. *Бхаттачария Р. Н.*, *Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с. (См. с. 248–249.)
7. *Paditz L.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — Statistics, 1989, v. 20, № 3, p. 453–464.
8. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, № 1, p. 122–139.
9. *Esseen C. G.* Determination of the maximum deviation from the Gaussian law. — Ark. Mat. Astron. Fyz., 1943, v. A29, № 20, p. 1-10.
10. *Шевцова И. Г.* Моментные оценки точности нормальной аппроксимации с уточненной структурой для сумм независимых симметричных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 499–532.
11. *Салихов Н. П.* Оценка функции концентрации методом Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 561–577.

§ 11.2.4. Симметрично распределенные независимые одинаково распределенные случайные величины [5)]

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\mathbf{P}\left\{S_n/\sqrt{n}<x\right\} - \Phi(x)\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}+2\sqrt{2}\,\overline{\overline{A}}\right)\frac{1}{n^{\delta/2}}\,\mathbf{M}\,|X|^{2+\delta},$$

если $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, где $X_1, X_2, \dots, X_n$ — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие симметричные распределения, что $\mathbf{D}\,X_1 = 1$, $0 < \delta < 1$, $n \geqslant 2$, $\overline{\overline{A}}$ — константа в теореме Берри–Эссеена (см. Комментарий 11.2.3-1).

1. *Сенатов В. В.* Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М: Либроком, 2009, 352 с. (См. с. 87.)

[5)] В следующих за данным разделом классификации неравенств для нормально распределенных, дискретных, дискретных неотрицательных, и двухточечных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

§ 11.3. Суммы зависимых случайных величин

§ 11.3.1. Ограниченные случайные величины [6)]

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |\mathbf{P}\{S_n<xB_n\} - \Phi(x)| \leqslant 324\sqrt{2}H_0/B_n,$$

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant tB_n\} \leqslant e^{-\lambda t^2/(2(\lambda H+t))},$$

если $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$, где $X_1, X_2, \dots, X_n$ — такие m-зависимые случайные величины, что $m \geqslant 0$, $|X_i| \leqslant L$, $\mathbf{M}\,X_i = 0$, $\mathbf{M}\,X_i^2 = 1$ для $i = 1, 2, \dots, n$, $B_n = (\mathbf{M}\,S_n^2)^{1/2} > 0$, $H = 32n(m+1)L^2/B_n^2$, $H_0 = 8(m+1)L\max\{1, H/2\}$, $\lambda = B_n/(8(m+1)L)$, $t \geqslant 0$.

1. *Статулявичус В. А., Якимавичюс Д. А.* Оценки семиинвариантов и центрированных моментов случайных процессов с перемешиванием. I. — Лит. матем. сб., 1988, т. XXVIII, в. 1, с. 112–128.

§ 11.3.2. Случайные величины с нулевым средним [7)]

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \big|\mathbf{P}\big\{S_n<x\sqrt{B_n}\big\} - \Phi(x)\big|\,dx\Big|$$
$$\leqslant \min\big\{a_m L_{3,n} + b_m L_{4,n}, a_{1,m}L_{3,n}^{(1)} + b_{1,m}L_{4,n}^{(1)} + a_{2,m}L_{1,n}^{(2)} + b_{2,m}L_{2,n}^{(2)}\big\},$$

если $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, где $X_1, X_2, \dots, X_n$ — такие m-зависимые случайные величины, что $m \geqslant 0$, $\mathbf{M}\,X_i = 0$ для $i = 1, 2, \dots$, $L_{p,n}^{(1)} = B_n^{-p/2}\sum_{i=1}^n \mathbf{M}\big|X_i^{(1)}\big|^p$, $L_{p,n}^{(2)} = B_n^{-p/2}\sum_{i=1}^n \mathbf{M}\big|X_i^{(2)}\big|^p$ для $p > 0$, $X_i^{(1)} = X_i\,\mathbf{I}\{|X_i| \leqslant B_n\} - \mathbf{M}\,X_i\,\mathbf{I}\{|X_i| \leqslant B_n\}$, $X_i^{(2)} = X_i\,\mathbf{I}\{|X_i| > B_n\} + \mathbf{M}\,X_i\,\mathbf{I}\{|X_i| \leqslant B_n\}$ для $i = 1, 2, \dots, n$, $a_m = 7{,}5\,(2m+1)(3{,}6m+1)$, $b_m = 10\,(2m+1)(22m^2+9{,}4m+1)/3$, $a_{1,m} = 1{,}76\,a_m$, $b_{1,m} = 2{,}34\,b_m$, $a_{2,m} = 14{,}2\,(1{,}9m+1)$, $b_{2,m} = 3{,}3\,(2m+1)$.

1. *Сунклодас Й.* Расстояние в метрике L_1 распределения суммы слабо зависимых случайных величин от нормальной функции распределения. — Лит. матем. сб., 1982, т. XXII, в. 2, с. 170–187.

[6)] В предшествующих данному разделу классификации неравенств для неограниченных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

[7)] В предшествующих данному разделу классификации неравенств для неотрицательных случайных величин, а также в следующих за данным разделом классификации неравенств для симметрично распределенных, для нормально распределенных, для дискретных, дискретных неотрицательных и двухточечных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

§ 11.4. Случайное число случайных величин

§ 11.4.1. Случайное число неограниченных случайных величин

$$\Phi(-x)\Big(1-f\frac{x}{a}\Big)\exp\Big\{-\frac{x^3}{a}\lambda\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big\}$$
$$\leqslant \min\big\{\mathbf{P}\big\{S_\nu \geqslant m\mathbf{M}\,\nu+\sigma\sqrt{\mathbf{M}\,\nu}\big\},\mathbf{P}\big\{S_\nu < m\mathbf{M}\,\nu - x\sigma\sqrt{\mathbf{M}\,\nu}\big\}\big\}$$
$$\leqslant \Phi(-x)\Big(1+f\frac{x}{a}\Big)\exp\Big\{\frac{x^3}{a}\lambda\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big\},$$

если $S_\nu = X_0+X_1+\cdots+X_\nu$, $X_0, X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины, случайная величина ν не зависит от $X_0, X_1, X_2, \ldots$ и принимает лишь целые неотрицательные значения, $\mathbf{M}\,X_i = m$, $\sigma = (\mathbf{D}\,X_i)^{1/2} > 0$, $|\mathbf{M}\,(X_i-m)^k|$ для $i = 0,1,2,\ldots$, $k = 3,4,\ldots$ при некоторых $H_1 > 0$, $A_1 > 0$,

$$|\Gamma_k(\nu)| = \Big|\frac{d^k}{dt^k}\,\mathbf{M}\,e^{it\nu}\Big|\Big|_{t=0} \leqslant k!\,H_2A_2^{k-1}(\mathbf{M}\,\nu)^{1+(k-1)c} \quad \text{для} \quad k=2,3,\ldots$$

при некоторых $H_2 > 0$, $A_2 > 0$, $c \geqslant 0$,

$$a = \frac{\sqrt{\mathbf{M}\,\nu}}{\max\{\sqrt{3A_2}\,(\sqrt{\mathbf{M}\,\nu})^c,\ A_1(1+2H_1)/\sigma,\ \sqrt{2}\}},$$
$$f = \inf_{0<\delta<w}\frac{8H(1+7,2(1+2\delta+\min\{(1-u)^3/(3H),(2H^{1/4})^{-1}\}^4)}{(1-\delta)^4(1-\rho)^{3/2}},$$

$H = 3(1+H_2/2)/2$, $1 \leqslant x \leqslant ua$, $u = \delta(1+\delta)/2$, $\rho = 6H\delta/(1-\delta)^3$, w — единственный на $(0,1)$ корень уравнения $6\,Hw = (1-w)^3$, $\lambda(t) = w\sum_{k=0}^\infty (k+3)^{-1}t^k/v^{k+2}$, $v = w(1+w)/2$.

Если $\nu \sim \mathrm{Pois}\,(\lambda)$, $\lambda > 0$, то можно положить $H = 2,25$, $a = \sqrt{\lambda}/\max\{\sqrt{3}, A_1(1+2H_1)/\sigma\}$.

Если $\nu \sim \mathrm{Bin}\,(n,p)$, $0 < p < 1$, то можно положить $H = 2,783$, $a = \sqrt{np}/\max\{3, A_1(1+2H_1)/\sigma\}$.

1. *Статулявичус В. А.* О вероятностях больших уклонений для суммы случайного числа независимых случайных величин. — Лит. матем. сб., 1967, т. VII, в. 3, с. 513–516.

§ 11.4.2. Случайное число неотрицательных случайных величин [8)]

$$\sup_{x\geqslant 0}\left|\mathbf{P}\left\{\frac{S_\nu}{1/\theta-1+c}>x\,\mathbf{M}\,X_0\right\}-e^{-x}\right|\leqslant f(\theta),$$

если $S_\nu = X_0+X_1+\dots+X_\nu$, $X_0, X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X_0 \geqslant 0$, $F(u) = \mathbf{P}\{X_0 \geqslant u\}$, $H(x) = (\int_0^x F(u)\,du)^{-1}$, случайная величина ν не зависит от $X_0, X_1, X_2, \dots$, $\mathbf{P}\{\nu = k\} = \theta(1-\theta)^k$ для $k = 0, 1, \dots$, $0 < \theta < 1$; либо $c = \mathbf{M}\,X_0^2/(2(\mathbf{M}\,X_0)^2)$ и $f(\theta) = 4\theta\mathbf{M}\,X_0^2/(\mathbf{M}\,X_0)^2$, либо $c = H^2(1/\theta)\int_0^{1/\theta} uF(u)\,du$ и $f(\theta) = \theta^{\alpha-1}(1+8\alpha^{-1}H^2(1/\theta)\mathbf{M}\,X_0^\alpha$, $1<\alpha<2$, либо $c = H^2(p)\int_0^p uF(u)\,du$ и $f(\theta) = (\mathbf{M}\,g(X_0)+8H(p))p$, $p = \sqrt{\theta^{-1}h(\theta^{-1})}$, $g(x)$ — непрерывная возрастающая неотрицательная выпуклая вниз на $(0,\infty)$ функция, $g(0) > 0$, $h(x)$ — функция, обратная к $g(x)$.

1. *Сугакова Е. В.* Экспоненциальная асимптотика сумм геометрического числа независимых случайных величин. — Теория вероятн. матем. статист., 1990, в. 42, с. 135–139.

$$f(x) \leqslant \mathbf{P}\{S_\nu \leqslant x\} \leqslant 1-(1-q)^{x+\delta} \leqslant 1-e^{-qx}+q\max\{\delta, 1\},$$

если $S_\nu = X_1+X_2+\dots+X_\nu$, $X_1, X_2, \dots$ — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что $X_1 \geqslant 0$, $\mathbf{M}\,X_1 = 1$, ν не зависит от $X_1, X_2, \dots$, $\mathbf{P}\{\nu = k\} = q(1-q)^{k-1}$ для $k = 1, 2, \dots$, $0 < q < 1$, $f(x) = (1-e^{-px}/(1-q))^+$, если $0 \leqslant x \leqslant a/q$, $f(x) = (1-e^{-px}/(1-q)-q/(a-q)^2\,\mathbf{D}\,X_1)^+$, если $x > a/q$, $p = q/(1+bq)$, $b = (\alpha\mathbf{M}\,X_1^2-1)^+$, $\alpha = (e^a-1-a)/a^2$, $a > 0$, $\delta = \sup_{x\in\mathbf{R}}\{H(x)-x\}$, $H(x) = \mathbf{M}\,N(x)$, $N(x) = \max\{n\colon\ n \geqslant 0,\ S_n \leqslant x\}$.

В [1] утверждается, что $\delta \leqslant \mathbf{D}\,X_1$ и что нижняя оценка оптимальна при $a = z$, где z — корень уравнения $e^x = 1+x+x^2$, $1{,}79 < z < 1{,}8$.

1. *Kalashnikov V. V.* Upper and lower bounds for geometric convolutions. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 4, с. 790–791.

[8)] В предшествующих данному разделу классификации неравенств для ограниченных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

§ 11.4.3. Случайное число случайных величин с нулевым средним [9)]

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{P}\left\{S_\nu < x\sqrt{\mathbf{M}\,\nu}\right\} - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{f(c)}{\sqrt{\mathbf{M}\,\nu-2}} + 4,42\,\frac{\mathbf{M}\,|\nu-\mathbf{M}\,\nu|}{\mathbf{M}\,\nu},$$

если $S_\nu = X_1+X_2+\dots+X_\nu$, $X_1, X_2, \dots$ — такие независимые одинаково распределенные 7случайные величины, что $\mathbf{M}\,X_1 = 0$, $\mathbf{D}\,X_1 = 1$, случайная величина ν э не зависит от $X_1, X_2, \dots$ и принимает лишь натуральные значения, $\mathbf{M}\,\nu > 4$, $c = \int_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,|d(\mathbf{P}\,\{X_1 < x\} - \Phi(x))|$, $f(t) = 2,7\,t$ при $t \geqslant 0,49$, $f(t) = 0,65\,t + 1,23\,/(\ln(0,81/t))$ при $0 < t < 0,49$.

1. *Аугутис Ю., Кароблис Л.* Аппроксимация распределения суммы случайного числа одинаково распределенных случайных величин. — Лит. матем. сб., 1984, т. XXIV, в. 3, с. 21–28.

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}(1+x^2)\,|\mathbf{P}\,\{S_\nu < x\theta\} - \Phi(x)|$$
$$\leqslant \frac{10}{9}\left(K_1\frac{1}{\theta^3}\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\mathbf{M}\,|X_i|^3\right) + K_2\mathbf{M}\left|\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{\nu}\mathbf{D}\,X_i - 1\right|\right),$$

если $S_\nu = X_1+X_2+\dots+X_\nu$, $X_1, X_2, \dots$ — такие независимые случайные величины, что $\mathbf{M}\,X_k = 0$ для $k = 1, 2, \dots$, случайная величина ν не зависит от $X_1, X_2, \dots$ и принимает лишь натуральные значения, $K_1 = 30,5378 + A/\sqrt{\varepsilon^3}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\theta > 0$, $K_2 = 1/(1-\varepsilon) + \max\{w/(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}), v/(1-\varepsilon)\} + 3b^2/(2(b-1)^2)$, $v = 1 + 1/\sqrt{2\pi e}$, $w = \sqrt{b/(2\pi e)}(1+3\sqrt{3}\,b/e)$, $b > 1$, A — константа в теореме Эссеена, $A \leqslant 0,7915$. О константе A см. Комментарий 11.1.3-1.

1. *Круглов В. М., Королев В. Ю.* Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990, 269 с. (См. с. 192.)

[9)] В следующих за данным разделом классификации неравенств для симметрично распределенных, для нормально распределенных, для дискретных, дискретных неотрицательных и двухточечных случайных величин в доступной нам литературе пока не обнаружено. — *Прим. авторов*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аксомайтис А.* Вероятностные неравенства для сумм случайного числа случайных величин. — Лит. матем. сб., 1974, т. XIV, в. 2, с. 241–242. (См. с. 510, 511.)
2. *Аугутис Ю.*, *Кароблис Л.* Аппроксимация распределения суммы случайного числа одинаково распределенных случайных величин. — Лит. матем. сб., 1984, т. XXIV, в. 3, с. 21–28. (См. с. 516.)
3. *Банис И. И.* Об интегральной предельной теореме при сходимости к устойчивому закону в многомерном случае. — Лит. матем. сб., 1970, т. X, в. 4, с. 665–671. (См. с. 495.)
4. *Банис И. И.* Оценка скорости сходимости в интегральной предельной теореме. — Лит. матем. сб., 1972, т. XII, в. 1, с. 41–45. (См. с. 495.)
5. *Басаликас А.* Некоторые асимптотические свойства полиномиальных оценок Питмэна–Линника. — Лит. матем. сб., 1984, т. XXIV, в. 2, с. 16–29. (См. с. 503.)
6. *Басаликас А. А.* Некоторые асимптотические свойства распределений полиномиальных форм. — Лит. матем. сб., 1988, т. XXVIII, в. 4, с. 644–653. (См. с. 508.)
7. *Бенткус В. Ю.*, *Кирша К. П.* Оценки близости функции распределения к нормальному закону. — Лит. матем. сб., 1989, т. XXIX, в. 4, с. 657–673. (См. с. 497.)
8. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. 4. М.: Наука, 1964, 577 с. (См. с. 485.)
9. *Бикялис А.* Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. — Лит. матем. сб., 1966, т. VI, в. 3, с. 323–346. (См. с. 489.)
10. *Боровских Ю. В.* О нормальной аппроксимации U-статистик. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 469–488. (См. с. 508.)
11. *Бхаттачария Р. Н.*, *Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с. (См. с. 497.)
12. *Вайткус П. С.* Неравенства для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин в случае предельного устойчивого закона. — Лит. матем. сб., 1972, т. 12, в. 4, с. 27–30. (См. с. 495.)
13. *Волкова А. Ю.* Уточнение центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных индикаторов. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 885–888. (См. с. 494.)
14. *Золотарев В. М.* О близости распределений двух сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 3, с. 519–526. (См. с. 491, 501.)
15. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. VIII, в. 1, с. 89–94. (См. с. 483.)
16. *Игнат Ю. И.*, *Падитц Л.* Уточнение некоторых оценок отклонения от нормального закона распределения суммы независимых случайных величин. — Теория вероятн. матем. статист., 1987, т. 37, с. 57–66. (См. с. 490, 491.)
17. *Калашников В. В.*, *Цициашвили Г. Ш.* Асимптотически точные двусторонние оценки вероятности разорения при наличии больших выплат. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1998, т. 5, в. 1, с. 66–82. (См. с. 515.)
18. *Королев В. Ю.* О точности нормальной аппроксимации для распределений сумм случайного числа независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. XXXIII, в. 3, с. 577–581. (См. с. 510, 512.)
19. *Королев В. Ю.* Приближение распределений сумм случайного числа независимых случайных величин смесями нормальных законов. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 3, с. 581–588. (См. с. 510, 517.)
20. *Королев В. Ю.*, *Шевцова И. Г.* Новая моментная оценка скорости сходимости в теореме Ляпунова. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 3, с. 577–582. (См. с. 485, 486, 497.)

63. *Englund G.* Письмо в редакцию. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, в. 1, с. 200–201. (См. с. 511.)
64. *Esseen C. G.* Determination of the maximum deviation from the Gaussian law. — Ark. Mat. Astron. Fyz., 1943, v. A29, № 20, p. 1-10. (См. с. 497.)
65. *Hertz E. S.* On convergence rates in the central limit theorem. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, № 2, p. 475–479. (См. с. 491.)
66. *Kalashnikov V. V.* Upper and lower bounds for geometric convolutions. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 4, с. 790–791. (См. с. 514.)
67. *Paditz L.* Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. der HfV «Friedrich List» Dresden, 1986, в. 33, S. 399–404. (См. с. 488.)
68. *Paditz L.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — Statistics, 1989, v. 20, в. 3, p. 453–464. (См. с. 485, 488, 489, 490, 497.)
69. *Paditz L.*, *Wolf W.* Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunction von Summen unabhängiger Zufallsgrössen zur Verteilungsfunction $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung. — В сб.: Вторая вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. Т. 3. Вильнюс: ИМК АН ЛитССР, 1977, в. 3, с. 158–159. (См. с. 489.)
70. *Uspensky J. V.* Introduction to mathematical probability. N. Y.–London: McGraw-Hill, 1937, IX+411 p. (См. с. 484.)
71. *Weber N. C.* Rates of convergence for backwards martingale arrays. — Лит. матем. сб., 1982, т. XXII, в. 2, с. 20–27. (См. с. 502.)